



UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA

COORDINACIÓN GENERAL ACADÉMICA

Coordinación de Bibliotecas

Biblioteca Digital

La presente tesis es publicada a texto completo en virtud de que el autor ha dado su autorización por escrito para la incorporación del documento a la Biblioteca Digital y al Repositorio Institucional de la Universidad de Guadalajara, esto sin sufrir menoscabo sobre sus derechos como autor de la obra y los usos que posteriormente quiera darle a la misma.

UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA

Centro Universitario de los Lagos

Maestría en Ciencia y Tecnología



TÍTULO

**“Diseño y caracterización de un circuito electrónico basado
en un sistema de ecuaciones deterministas para
generar movimiento Browniano”**

TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE “MAESTRO EN CIENCIA Y TECNOLOGÍA”

Presenta

José Luis Echenausía Monroy

Director de Tesis:

Dr. Guillermo Huerta Cuéllar

Co-Director de Tesis:

Dr. J. Ricardo Sevilla Escoboza

Lagos de Moreno, Jalisco 19 de junio de 2017

Prefacio

Esta tesis es el resultado de la investigación desarrollada en el Laboratorio de Sistemas Dinámicos del Centro Universitario de los Lagos, parte de la red Universitaria de Jalisco de la Universidad de Guadalajara, bajo la dirección del Dr. Guillermo Huerta Cuéllar, apoyada por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, CONACyT, al ser beneficiado por una beca para la realización de estudios de posgrado, con número de becario 582124 y CVU 706850. Durante la permanencia en el posgrado, el CONACyT apoyó, por medio del programa de Becas Mixtas, la realización de una estancia de investigación en el extranjero, misma que se realizó en la Universidad Politécnica de Madrid. De igual forma, la estancia de investigación realizada se vió apoyada por el proyecto de la Universidad de Guadalajara con número UDG-PTC-1289-DSA/103 5/16/10313, y un proyecto del grupo de redes biológicas de la UPM, con número FIS2013-41057-P.

Los resultados derivados del trabajo aquí presentado, fruto de dos años dentro del programa de *Maestría en Ciencia y Tecnología del Centro Universitario de los Lagos*, se ven plasmados en un trabajo de congreso, el cual cuenta con código ISSN, *Control para la generación de multi-enrosados mediante la implementación de interfaces virtuales*. 2do Congreso Iberoamericano de Instrumentación y Ciencias Aplicadas, SOMI XXXI, Cd. de Guatemala, Guatemala. ISSN:2395-8499, un trabajo de congreso con código ISBN, *Implementación de Interfaces virtuales para la generación de multi-enrosados*. Congreso Nacional de Circuitos y Sistemas, CONCYS. San Luis Potosí, México. ISBN: 978-607-9453-89-3, así como la participación en la XVII edición de la *Feria de la Ciencia, Arte y Tecnología* del Centro Universitario de los Lagos, *Control para la generación de multi-enrosados mediante la implementación de interfaces virtuales*. XVII Feria de la Ciencia, Arte y Tecnología,

CULagos, Jalisco, México.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	3
1.2. Planteamiento del problema	7
1.3. Justificación	7
1.4. Hipótesis	8
1.5. Objetivos	8
1.5.1. Objetivo general	8
1.5.2. Objetivos específicos	8
1.6. Metodología	9
1.7. Distribución de la tesis	13
2. Sistemas Dinámicos	15
2.1. Tipos de Sistemas Dinámicos	16
2.1.1. Sistemas lineales y Sistemas no lineales	17
2.1.2. Sistemas autónomos y Sistemas no autónomos	18
2.1.3. Sistemas de tiempo continuo y Sistemas de tiempo discreto	18
2.2. Análisis Lineal de Sistemas Dinámicos	19
2.2.1. Sistemas unidimensionales	19
2.2.2. Sistemas de dos dimensiones	21
2.2.3. Sistemas de tres dimensiones	23
2.2.4. Sistemas Disipativos Inestables, UDS	26

3. Implementación Electrónica	29
3.1. Sistema generador de multi-enroscados	30
3.1.1. Modelo Matemático	31
3.1.2. Implementación electrónica y ecuaciones equivalentes	35
3.1.3. Espacios de Fase	41
3.2. Sistema generador de movimiento Browniano	42
3.2.1. Modelo Matemático	42
3.2.2. Definición de parámetros para sistema UDS I	44
3.2.3. Implementación electrónica y ecuaciones equivalentes	50
3.3. Interfaces virtuales	56
4. Resultados	65
4.1. Análisis de series temporales con distribución normal	66
4.1.1. Análisis de Fluctuaciones sin Tendencia	68
4.1.2. Ley potencial entre frecuencia e intensidad del espectro de potencia .	70
4.1.3. Distribución Normal de probabilidad	72
4.1.4. Desplazamiento cuadrático medio	74
4.2. Análisis del sistema generador de multi-enroscados	75
4.2.1. Análisis de Fluctuaciones sin Tendencia	77
4.2.2. Ley potencial entre frecuencia e intensidad del espectro de potencia .	79
4.3. Análisis de sistema generador de movimiento Browniano	81
4.3.1. Análisis de Fluctuaciones sin Tendencia	82
4.3.2. Ley potencial entre frecuencia e intensidad del espectro de potencia .	83
4.3.3. Distribución Normal de probabilidad	84
4.3.4. Desplazamiento cuadrático medio	85
5. Conclusiones	89
A. El Amplificador Operacional y sus configuraciones	93
A.1. Características de los amplificadores operacionales	94
A.2. Amplificador operacional ideal	96
A.3. Configuraciones de un operacional con elementos pasivos	98

A.3.1. Amplificador Inversor	98
A.3.2. Amplificador no Inversor	100
A.3.3. Amplificador Sumador Inversor	101
A.3.4. Amplificador Derivador	102
A.3.5. Amplificador Integrador	104
A.3.6. Comparador de Voltaje	105
A.3.7. Seguidor de Voltajes	106
B. Análisis de Fluctuaciones sin Tendencia	107
B.1. Coeficiente de Determinación r^2	114
C. Ley de escalamiento entre frecuencia e intensidad del espectro de potencia	115
D. Distribución de Probabilidad Normal	123
E. Desplazamiento cuadrático medio	127
F. Adquisición de Datos	131
G. Recursos de Programación	139
H. Combinaciones de valores exploradas	143
H.1. Análisis de Fluctuaciones sin Tendencia	147
H.2. Ley potencial entre frecuencia e intensidad del espectro de potencia	149
H.3. Distribución Normal de Probabilidad	150
H.4. Desplazamiento cuadrático medio	150
Bibliografía	153

Índice de figuras

1.1. Diagrama de flujo de la metodología implementada.	11
1.2. Máquina de estados que describe las interfaces virtuales diseñadas.	13
3.1. Visualización de un punto fijo de tipo silla para el sistema $z = x^2 - y^2$	31
3.2. <i>Izquierda</i> . Esquema para la implementación de una <i>SNLF</i> de cinco niveles. <i>Derecha</i> . Respuesta de salida de la <i>SNLF</i> de cinco niveles.	33
3.3. <i>Izquierda</i> . Comportamiento del valor propio real a lo largo de la modificación del parámetro de control, a . <i>Derecha</i> . Comportamiento de los valores propios complejos conjugados debido a la modificación en el parámetro de control, a	34
3.4. Diagrama a bloques del modelo matemático del sistema generador de multi- enroscados.	36
3.5. Esquema del circuito electrónico implementado para el modelo generador de multi-enroscados. La variable de estado x se encuentra encerrada en el recuadro azul, el recuadro de color naranja corresponde a la variable y , así como el verde a la variable z	37
3.6. Diseño completo del circuito electrónico generador de multi-enroscados im- plementado en la plataforma de desarrollo Eagle.	39
3.7. Pistas del diseño del circuito electrónico generador de multi-enroscados im- plementado en la plataforma de desarrollo Eagle.	40
3.8. Componentes del diseño del circuito electrónico generador de multi-enroscados implementado en la plataforma de desarrollo Eagle.	40

3.9. Proyecciones en el espacio xy de la respuesta del sistema simulado en Multisim a)-d), Proyecciones en el espacio xy de la respuesta del sistema físico e)-h).	41
3.10. <i>Izquierda</i> . Comportamiento de la parte real de los valores propios del sistema. <i>Derecha</i> . Comportamiento de la componente imaginaria de los valores propios del sistema para los parámetros $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.7$, $\alpha_3 = [0, 2.5]$.	46
3.11. Comportamiento de la sumatoria de los valores propios del sistema para los parámetros $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.7$, $\alpha_3 = [0, 2.5]$.	47
3.12. Diagrama de flujo del discretizador de dinámica UDS I .	48
3.13. Mapa de comportamiento del tipo UDS I en base a la modificación de dos parámetros del sistema, $\alpha_1 = 0.7$, $\alpha_2 = \alpha_3 = [0, 2]$, $\gamma = 0.1$. El color amarillo responde a una configuración de valores propios del tipo UDS I .	48
3.14. Volúmen de comportamiento del sistema generador de movimiento Browniano bajo el régimen de un sistema UDS I . Todo punto de color contenido en el volúmen responde a una configuración, en puntos fijos, del sistema bajo el regimen UDS I .	49
3.15. Comportamiento del volumen del sistema bajo el regimen de un sistema UDS I , Fig. 3.14, seccionado para distintos valores de α_1 .	49
3.16. Diagrama a bloques del sistema generador de movimiento Browniano.	51
3.17. Esquema del circuito implementado para el modelo generador de movimiento Browniano. La variable de estado x se encuentra encerrada en un recuadro de color azul, de igual forma la variable y del sistema se encierra en un recuadro naranja, así como la variable z en color verde.	53
3.18. Modelo del circuito electrónico generador de movimiento Browniano, implementado en la plataforma de desarrollo Eagle.	55
3.19. Componentes del diseño del circuito electrónico generador de movimiento Browniano, implementado en la plataforma de desarrollo Eagle.	55
3.20. Pistas del diseño del circuito electrónico generador de movimiento Browniano, implementado en la plataforma de desarrollo Eagle.	56
3.21. <i>Izquierda</i> . Esquema del circuito electrónico híbrido. <i>Derecha</i> . Diseño en Eagle del circuito híbrido.	57

3.22. <i>Izquierda</i> . <i>SNLF</i> implementada mediante amplificadores operacionales. <i>Derecha</i> . <i>SNLF</i> implementada en la tarjeta de adquisición de datos dSPACE 1104.	58
3.23. Proyecciones de la respuesta del circuito híbrido en el espacio xy con dos, tres, cuatro y cinco enroscados.	59
3.24. Máquina de estado diseñada para la caracterización de sistemas electrónicos.	59
3.25. Esquema de la preparación experimental.	60
3.26. Vista de la segunda pestaña de la interfaz virtual generada, panel de control del instrumento.	61
3.27. Vista de la segunda pestaña de la interfaz virtual generada, visualización de series temporales.	62
3.28. Vista de la tercera pestaña de la interfaz virtual generada, generación de diagrama de bifurcación de máximos locales.	62
4.1. <i>Izquierda</i> . Visualización de una serie temporal generada a partir de una distribución de probabilidad de tipo normal. <i>Derecha</i> . Espacio de fase de quince trayectorias normales generales.	67
4.2. <i>Izquierda</i> . Visualización de una serie temporal generada a partir de una distribución de probabilidad de tipo Normal. <i>Derecha</i> . Gráfica obtenida a partir de la aplicación del método de DFA a la serie temporal, el cuál posee un factor de determinación $r^2 = 0.9989$	69
4.3. <i>Izquierda</i> . Mapa de valores de exponente de DFA de series temporales numéricas. <i>Derecha</i> . Histograma de distribución de los valores ϑ	70
4.4. <i>Izquierda</i> . Visualización de una serie temporal generada a partir de una distribución de probabilidad de tipo Normal. <i>Derecha</i> . Gráfico doble logarítmico del espectro de frecuencias para determinar el exponente de la ley de potencias, con factor de determinación $r^2 = 0.9888$	71
4.5. <i>Izquierda</i> . Mapa de valores de exponente de la ley de potencias de series temporales numéricas. <i>Derecha</i> . Histograma de distribución de los valores ρ	72
4.6. <i>Izquierda</i> . Histograma de la serie temporal analizada. <i>Derecha</i> . Gráfico Normal de la serie temporal analizada.	73

4.7. <i>Izquierda</i> . Serie temporal con distribución Normal. <i>Derecha</i> . Comportamiento del desplazamiento cuadrático medio de la serie temporal.	74
4.8. Proyecciones en el espacio xy de la respuesta del sistema híbrido simulado en MatLab, para dos, tres, cuatro y cinco enroscados.	76
4.9. Diagramas de bifurcación calculados numéricamente para el comportamiento del circuito híbrido, <i>Izquierda</i> , graficado en base a la resistencia de modificación, <i>Derecha</i> , graficado en base al valor de la ganancia inyectada al sistema.	76
4.10. Diagramas de bifurcación obtenidos del circuito híbrido, <i>Izquierda</i> , graficado en base a la resistencia de modificación, <i>Derecha</i> , graficado en base al valor de la ganancia inyectada al sistema.	77
4.11. Comportamiento del sistema generador de multi-enroscados, híbrido, a lo largo de la modificación del parámetro de control mediante el análisis de fluctuaciones sin tendencia.	78
4.12. Comportamiento del sistema generador de multi-enroscados, híbrido, a lo largo de la modificación del parámetro de control mediante el análisis de leyes de potencia.	79
4.13. Diagrama de flujo del proceso para encontrar dinámica de tipo Browniana en resultados experimentales.	80
4.14. Esquema del circuito electrónico, híbrido, del modelo generador de movimiento Browniano.	81
4.15. <i>Izquierda</i> . Diagrama de bifurcación de máximos locales para $\alpha_1 = 0.7$, $\alpha_2 = 1.2$, $\alpha_3 = 0.1$, <i>Derecha</i> . Curva de exponente ϑ de la combinación de parámetros de control explorada.	83
4.16. <i>Izquierda</i> . Diagrama de bifurcación de máximos locales para $\alpha_1 = 1.5$, $\alpha_2 = 1.3$, $\alpha_3 = 0.1$, <i>Derecha</i> . Curva del exponente ϑ de la combinación de parámetros de control explorada.	84
4.17. Análisis de series temporales del sistema electrónico, para la combinación de valores $\alpha_1 = 1.5$, $\alpha_2 = 1.3$, $\alpha_3 = 0.1$, en búsqueda de normalidad.	85
4.18. Análisis de serie temporal del sistema electrónico, para la combinación de valores $\alpha_1 = 1.5$, $\alpha_2 = 1.7$, $\alpha_3 = 0.7$	86

4.19. Análisis de serie temporal del sistema electrónico, para la combinación de valores $\alpha_1 = 1.5$, $\alpha_2 = 1.7$, $\alpha_3 = 0.7$	87
4.20. <i>Izquierda</i> . Volúmen de comportamiento del sistema generador de movimiento Browniano bajo el régimen de un sistema UDS <i>I</i> , <i>Derecha</i> . Combinaciones de valores en los parámetros de control que cumplen con las características de un sistema que presenta movimiento Browniano.	88
A.1. <i>Izquierda</i> , Representación simbólica de un amplificador operacional. <i>Derecha</i> , Amplificador operacional con líneas de polarización	94
A.2. Relación entrada-salida de un amplificador operacional.	96
A.3. Representación del modelo ideal de un op-amp.	96
A.4. Configuración de un op-amp en modo amplificador inversor.	99
A.5. Configuración de un op-amp en modo amplificador no inversor.	100
A.6. Configuración de un op-amp en modo sumador inversor.	101
A.7. Configuración de un op-amp como un amplificador derivador.	103
A.8. Configuración de un op-amp en modo amplificador integrador.	104
A.9. Configuración de un op-amp en modo comparador de voltaje.	105
A.10. Configuración de un op-amp como seguidor de voltaje.	106
B.1. <i>Izquierda</i> . Serie temporal del sistema de Lorenz generada en MatLab, <i>Derecha</i> . Análisis de DFA para serie temporal del sistema Lorenz.	110
B.2. <i>Izquierda</i> . Curvas de exponente ϑ para diferentes aproximaciones lineales, <i>Derecha</i> . Curvas de correlación para las diferentes aproximaciones.	112
B.3. <i>Izquierda</i> . Curvas del coeficiente de aproximación r^2 para un ajuste lineal por función <i>polyfit</i> y por mínimos cuadrados, <i>Derecha</i> . Curva del coeficiente de aproximación r^2 para ajuste lineal por definición de pendiente.	113
C.1. Ley potencial entre la magnitud de un terremoto y la cantidad de eventos.	116
C.2. <i>Izquierda</i> . Serie temporal del sistema de Lorenz generada en MatLab, <i>Derecha</i> . Espectro de potencias de la serie temporal del sistema de Lorenz.	118
C.3. Análisis en búsqueda de ley potencial en el espectro de potencias de la serie temporal del sistema de Lorenz.	119

C.4. <i>Izquierda</i> . Curvas de exponente ρ para diferentes aproximaciones lineales, <i>Derecha</i> . Curvas de correlación para las diferentes aproximaciones.	121
C.5. <i>Izquierda</i> . Curvas del coeficiente de aproximación r^2 para un ajuste lineal por función <i>polyfit</i> y por mínimos cuadrados, <i>Derecha</i> . Curva del coeficiente de aproximación r^2 para ajuste lineal por definición de pendiente.	121
D.1. Curva característica de una distribución Normal, campana de Gauss.	124
D.2. <i>Izquierda</i> . Gráfico de probabilidad Normal para una serie temporal con distribución Normal, <i>Derecha</i> . Gráfico de probabilidad Normal para una serie temporal con distribución Beta.	125
E.1. Curva de comportamiento del MSD descrita por Einstein.	128
E.2. <i>Izquierda</i> . Serie temporal del sistema dinámico Lorenz con parámetros de control $\sigma = 16.0$, $r = 45.92$, $b = 4$. <i>Derecha</i> . Atractor caótico del sistema de Lorenz.	129
E.3. <i>Izquierda</i> . Comportamiento del MSD del sistema de Lorenz con respecto al origen. <i>Derecha</i> . Comportamiento del MSD del sistema de Lorenz con respecto al punto anterior.	130
E.4. <i>Izquierda</i> . Comportamiento del MSD de una serie temporal Normal con respecto al origen. <i>Derecha</i> . Comportamiento del MSD de una serie temporal Normal con respecto al punto anterior.	130
F.1. Atractor de cinco multi-enroscados visto desde el osciloscopio Agilent DSO-X 3102 A.	133
F.2. <i>Izquierda</i> . Mapa de valores en exponente de DFA para la modificación de parámetros en la adquisición de datos. <i>Derecha</i> . Mapa de valores de la correlación de Pearson calculada entre la función de fluctuación y el ajuste lineal obtenido por mínimos cuadrados.	134
F.3. Mapa de valores del coeficiente de determinación calculado entre la función de fluctuación y el ajuste lineal obtenido por mínimos cuadrados.	134

F.4. <i>Izquierda</i> . Mapa de valores en exponente de ley de potencias para la modificación de parámetros en la adquisición de datos. <i>Derecha</i> . Mapa de valores de la correlación de Pearson calculada entre el espectro de potencias y el ajuste lineal obtenido por mínimos cuadrados.	135
F.5. Mapa de valores del coeficiente de determinación calculado entre el espectro de potencias y el ajuste lineal obtenido por mínimos cuadrados.	135
F.6. Atractor del sistema generador de multi-enroscados, obtenido con los parámetros de adquisición, 20 mil puntos en la serie temporal vs 20 kS/seg.	136
F.7. <i>Izquierda</i> . Análisis de DFA para la serie temporal de la variable x del atractor mostrado en la <i>Fig. F.6</i> . <i>Derecha</i> . Análisis de leyes de potencias para la serie temporal de la variable x	137

Índice de cuadros

2.1. Tipo de punto fijo de acuerdo a la ubicación del valor propio en un sistema de 1D.	20
2.2. Tipo de punto fijo de acuerdo a la ubicación de los valores propios en un sistema 2D, sí y solo sí $\lambda \in \mathbb{R}$	23
2.3. Tipo de punto fijo de acuerdo Traza, Tr, y determinante, Δ , de la matriz del Jacobiano, J, para un sistema 2D.	23
2.4. Tipo de punto fijo de acuerdo a la ubicación de los valores propios en un sistema 3D.	25
3.1. Valores de los componentes electrónicos utilizados en la implementación electrónica del modelo generador de hasta cinco multi-enroscados.	39
3.2. Valores utilizados para la generación de una SNLF de dos hasta cinco multi-enroscados.	42
3.3. (1) Valores utilizados en la implementación electrónica del modelo generador de movimiento Browniano.	54
3.4. (2) Valores utilizados en la implementación electrónica del modelo generador de movimiento Browniano.	54
4.1. Combinaciones de valores explorados que poseen componente Browniana en base a los análisis realizados.	88
H.1. (1) Valores explorados en la implementación electrónica del modelo generador de movimiento Browniano.	144

H.2. (2) Valores explorados en la implementación electrónica del modelo generador de movimiento Browniano.	145
H.3. (3) Valores explorados en la implementación electrónica del modelo generador de movimiento Browniano.	146
H.4. (2) Combinaciones de valores explorados que poseen exponente ϑ dentro del rango deseado para DFA.	147
H.5. (1) Combinaciones de valores explorados que poseen exponente ϑ dentro del rango deseado para DFA.	148
H.6. Combinaciones de valores explorados que poseen exponente ϑ y ρ dentro del rango deseado.	149
H.7. Combinaciones de valores explorados que poseen exponente ϑ y ρ dentro del rango deseado y cumplen con una distribución Normal.	150
H.8. Combinaciones de valores explorados que poseen componente Browniana en base a los análisis realizados.	151

Resumen

En el presente trabajo se llevó a cabo la implementación y estudio, tanto teórico como experimental, de dos osciladores definidos por ecuaciones diferenciales deterministas en búsqueda de dinámica de tipo aleatoria, semejante a la exhibida por un sistema Browniano, mediante el estudio de sus respuestas en base a cuatro análisis, i) la aplicación del método de Análisis de Fluctuaciones sin Tendencia, ii) la búsqueda de leyes de escalamiento presentes en el espectro de potencias, iii) la existencia de componentes de tipo Normal en la respuesta del sistema, iv) así como el comportamiento del desplazamiento cuadrático medio.

1

Introducción

La estocasticidad es una propiedad de diversos sistemas que evolucionan en el tiempo, la cual consiste en mostrar comportamiento aleatorio en el espacio de fase de dichos sistemas, sin dirección predeterminada o secuencia determinística de eventos; ésto lo podemos asociar a factores ambientales, como cuando zonas geográficas se ven afectadas por eventos climáticos que ocurren esporádicamente, como los tornados, incendios forestales y terremotos, entre otros [1–3]. El cambio aleatorio a lo largo del tiempo en las variables de un sistema puede ser interpretado como un proceso estocástico, cuyas características pueden variar a lo largo del tiempo; es un concepto matemático que sirve para tratar magnitudes que se encuentran en constante cambio sin un patrón de repetitividad, donde cada una de ellas tiene su propia función de distribución de probabilidad y pueden, o no, estar correlacionadas entre sí. Un ejemplo de éste tipo de sistemas lo podemos encontrar en el comportamiento de las corrientes oceánicas, donde intervienen fuerzas macroscópicas determinadas, como la fuerza de Coriolis [4], con otros componentes que no se pueden

determinar con gran precisión, por ejemplo, el forzamiento de los vientos sobre la superficie marina; irregularidades en el fondo marino, solo por mencionar algunas. Éstas componentes estocásticas se describen mediante ecuaciones de Langevin haciendo uso de términos de ruido estocásticos adecuados [4, 5].

El movimiento Browniano se refiere a la dinámica estocástica o aleatoria, que pueden seguir los diversos elementos de un sistema al cambiar en función del tiempo, un ejemplo común es el movimiento errático de las partículas de pelusa o polvo que se aprecian cuando por la rendija de una habitación entra un haz de luz [5, 6]. Otro ejemplo de sistema basado en el movimiento Browniano es el que frecuentemente se utiliza en los modelos financieros, el cual describe la evolución de los precios a lo largo del tiempo. Cuando se aplica a los precios, el movimiento Browniano da por hecho que el cambio de un instante de tiempo a otro, no está relacionado ni con el nivel de precios, ni con las series pasadas de cambios de precios [7], es decir; cada cambio de precio es independiente de las fluctuaciones de precios anteriores y la volatilidad de dichos cambios es constante.

Muchas de las funciones vitales en los seres vivos ocurren predominantemente en un entorno acuoso, sus componentes están sujetos a fluctuaciones térmicas que resultan en colisiones aleatorias y dan origen a un movimiento aleatorio y proco predecible, al cual llamamos movimiento Browniano [8]. En un instante de tiempo dado, una partícula Browniana puede recibir un número inimaginable de colisiones que no se cancelan entre sí, pues las velocidades de las partículas tienen una distribución normal y ocurren de manera aleatoria en el tiempo. Como resultado, la partícula Browniana ejecuta una caminata errática de corto alcance que tiende a visitar todos los sitios disponibles. Notablemente, los tiempos característicos de ésta caminata son extremadamente cortos en distancias muy pequeñas y muy largos para distancias relativamente mayores. La difusión es consecuencia del movimiento Browniano [9], pudiendo definirla como la migración de partículas de un soluto, bajo la acción de múltiples choques aleatorios con las partículas del disolvente [10], siendo ejemplos de ésta, la migración de fotones desde el centro hasta la superficie de una estrella, la liberación en el tracto digestivo de un medicamento suministrado por una tableta [11], la penetración de un fármaco anticanceroso en el tejido tumoral [12], la migración de fotones a través de la piel, la absorción de iones en la membrana celular a través de proteínas específicas [13], entre otros [14]. Hablando del caso de la difusión de fármacos en

particular, es de gran importancia el control de dicho factor, especialmente en problemas pulmonares debido a las dimensiones micrométricas del fármaco y las velocidades del aire; donde dicho control de difusión sería posible realizarlo si se utilizara un sistema de tipo determinista [15].

Al tener un sistema estocástico perdemos la capacidad de conocer el comportamiento futuro, por lo tanto, existe una incertidumbre sobre el resultado final en cada momento que se intente replicar el evento [16], lo cual no ocurre en un sistema con comportamiento determinista, donde el resultado final depende directamente de las condiciones iniciales. El determinismo puede definirse como: la teoría que afirma que todos los fenómenos o acontecimientos están determinados por algún motivo. Ésto implica entender la realidad como la consecuencia directa de una causa [17], donde sostiene que todo acontecimiento físico, incluyendo el pensamiento y acciones humanas, están causalmente determinados por la irrompible cadena causa-efecto. En correspondencia podemos decir que un sistema determinista es aquel en el cual no existen componentes estocásticas.

1.1 Antecedentes

El movimiento Browniano (MB), es el movimiento aleatorio que se observa en algunas partículas microscópicas que se encuentran en algún fluido (por ejemplo, polen en una gota de agua). Recibe su nombre en honor al escocés Robert Brown, biólogo y botánico que descubrió éste fenómeno en 1827 y observó que pequeñas partículas de polen se desplazaban en movimientos aleatorios sin razón aparente. Brown pretendía analizar minuciosamente la forma y tamaño de los granos de polen con un microscopio, pero se encontró con un problema; no paraban de moverse, éstos se desplazaban erráticamente por el campo de visión [18]. El matemático Thorvald N. Thiele, fué el primero en brindar una descripción formal de lo que hoy conocemos como movimiento Browniano [19] en 1880. Después del trabajo de Thiele existieron otros, pero uno de los más importantes fué el realizado por Albert Einstein, quien fué el primero en dar una solución numérica para explicar el MB [20], introduciendo la ecuación de lo que hoy conocemos como movimiento aleatorio, donde la fórmula planteada no se encuentra limitada a la descripción del comportamiento de las colisiones moleculares, si no que Einstein la formuló de tal forma que pudiese describir cualquier movimiento

definido de manera aleatoria. Posteriormente, Paul Langevin [21], en 1908 consiguió dar una descripción macroscópica al problema del movimiento Browniano mediante el uso de la Segunda Ley de Newton, con una solución a la cual, él mismo se refirió como infinitamente más simple que la encontrada por Einstein. Tal vez de los resultados mostrados por Einstein, uno de los más importantes en su estudio sobre MB, fué el definir la relación entre el coeficiente de difusión de un sistema Browniano con la constante de Boltzman, la temperatura del sistema y el número de Avogadro, lo cual fué demostrado experimentalmente por Perrín [22], trabajo merecedor de un premio Nobel por los resultados presentados. A partir de ese momento se comenzó a realizar una extensiva investigación sobre el MB y se han publicado una gran cantidad de trabajos abordando el fenómeno desde un punto de vista matemático como los de Smoluchowski [23], Fokker [24], Plank [25], Ornstein [26], Burger [27], y muchos más que han obtenido resultados buscando encontrar una solución para mostrar la relación entre la distribución de frecuencias y las ecuaciones diferenciales parciales parabólicas, con el coeficiente de difusión. A pesar de tantos años de estudio, actualmente el modelo propuesto por Langevin en 1908 es el más usado para la investigación y generación del MB.

El modelo dinámico para el movimiento Browniano propuesto por Langevin, muestra una naturaleza estocástica, pero se cree que el MB puede ser reproducido mediante modelos Hamiltonianos totalmente determinísticos [28–30]. Dicha idea del movimiento Browniano determinista ha sido tema de estudio en fenómenos como oscilaciones en reacciones químicas, en donde, en lugar de observarse la evolución temporal del sistema de forma aleatoria, resulta que el movimiento es completamente determinista y algunas veces dicho movimiento es referido como caos microscópico [17, 30, 31]. Trefàn y sus colaboradores [32], publicaron, en 1992, un modelo para la generación del movimiento Browniano determinista mediante el uso de mapas discretos. Posteriormente, en diciembre de 2014 F. J. Sevilla y otros [33], han mostrado que existe relación entre sincronización y movimiento colectivo del MB estocástico con el modelo de Kuramoto [34] para sincronización de osciladores. En 2014, G. Huerta-Cuéllar y colaboradores [35], propusieron un modelo para generar movimiento Browniano de forma determinista, basado en el modelo de Langevin, al cual le añaden una variable de estado formada por una función *jerk* [36], cuyo modelo cumple las características del movimiento Browniano clásico y abre la posibilidad de poder

controlarlo en sistemas reales debido a su carácter determinístico.

El término *jerk* se refiere a la tasa de cambio de la aceleración, definiéndose entonces como la derivada de la aceleración con respecto del tiempo o la tercera derivada de la posición [36], como ocurre en la ecuación de Langevin. El estudio y aplicación de la ecuación *jerk* se dá con Sprott en su trabajo [37] y es profundizado en [38], donde buscaba sistemas generadores de caos más sencillos, en comparación con el modelo existente de Lorenz o Chua, donde el objetivo era obtener un sistema de ecuaciones con el menor número de operadores aritméticos. El uso de éstas ecuaciones no lineales, ha sido extensamente estudiado para la generación de nuevos modelos generadores de caos, debido a su amplio campo de aplicaciones; como lo son las comunicaciones seguras y encriptación de mensajes [39, 40], generadores de números aleatorios, generadores de patrones, en el modelado biológico o médico, identificación biométrica [41], entre otros [42, 43].

Los sistemas no lineales, como el movimiento Browniano, representan fenómenos cuyo comportamiento no es expresable como la suma de las dinámicas de sus descriptores. Más formalmente, un sistema físico, o de otro tipo, es de tipo no lineal cuando las ecuaciones de movimiento, evolución o comportamiento que regulan su dinámica no son lineales; en particular, la dinámica no lineal se diferencia por no estar sujeta al principio de superposición. En diversas ramas de la ciencia la no linealidad es responsable de comportamientos complejos, frecuentemente impredecibles o caóticos. El tratamiento numérico de un sistema no lineal con comportamiento caótico, resulta más sencillo de resolverse cuando es modelado como un sistema determinista. Los sistemas no lineales deterministas se caracterizan por presentar una relación causa-efecto, la cual no es proporcional, a diferencia de los sistemas lineales. En realidad, casi todo sistema oscilatorio se aproxima a un sistema no lineal, si se le aleja lo suficiente de su punto de equilibrio siendo ejemplo de éste, el péndulo simple [44].

Desde hace algunas décadas, se ha llevado la investigación de fenómenos naturales mediante la implementación física de circuitos no lineales, de forma particular, la generación de atractores caóticos multi-enroscados mediante la utilización de dispositivos electrónicos [45, 46]. La razón por la que la utilización de circuitos electrónicos ha sido de gran relevancia en el estudio de dinámicas no lineales, es debido a que su campo de aplicación es universal, ya que conlleva los principios básicos de la evolución en el tiempo de cualquier

sistema dinámico, abarcando desde el movimiento planetario hasta la dinámica de fluidos. Casi cualquier sistema confirmará que la teoría y la simulación numérica de dinámicas no lineales es, en efecto, aplicable al mundo real y los circuitos electrónicos son sistemas físicos convenientes para poder abordarla [46–48].

El término de multi-enroscado, se refiere a la generación de un atractor que posee un mínimo de tres enroscados en su dinámica. Por ejemplo, los atractores con múltiples enroscados fueron propuestos por Suykens y Vanderwall en 1991 [45, 46], quienes enriquecieron el campo de investigación al abordar las propiedades cualitativas del sistema, sentando las bases para su estudio y posterior desarrollo, como lo comprueba en su posterior trabajo con Chua [49], al introducir un arreglo de hiper-cubos dentro de una red de células neuronales. A su vez, Yalcin [50], introdujo una familia de atractores hiper-caóticos. Teniendo todas estas aportaciones algo en común, utilizan como método para la aparición de multi-enroscados el añadir puntos de segmentación en la función no lineal del sistema de Chua, generando así una función PWL (Piecewise Linear). Una vez estudiado y validado el método de la función PWL, se propuso la utilización de una función escalón [51, 52], para la generación de la función no lineal, y así poder generar los multi-enroscados, la razón de la propuesta es sencilla, la complejidad que conlleva la implementación física de un sistema con un gran número de enroscados haciendo uso de la función Chua; dicha implementación de la función escalón obtuvo resultados, generando así atractores caóticos en 1D, redes de atractores de 2D y mallas de multi-enroscados en 3D. También se presentaron trabajos en los que se reemplazaba la función escalón por una función seno [53], generando resultados satisfactorios.

Otro método para obtener un generador de caos con multi-enroscados, de forma sencilla, es por medio del uso de la histéresis, como lo reportado en [54], obtenido mediante la implementación del generador de caos por medio de histéresis de Saito en cuatro arreglos generalizados de redes de células neuronales. Haciendo uso de la función de histéresis, también se encuentran trabajos como el de Varrientos [55], en el cual, un oscilador es capaz de generar multi-enroscados hasta en 4D. Además de los métodos antes enunciados, una serie de funciones saturadas fué introducida por Lü [52, 56], donde la construcción de dicha función se da en base a comparadores de voltaje implementados con circuitos operacionales, con lo que también se logró generar atractores con múltiples-enroscados en 1D,

2D y 3D [57], dando como resultado una manera más para la generación de sistemas caóticos con múltiples enroscados; siendo éstos los tres circuitos básicos para la generación de multi-enroscados, el circuito escalón, el circuito de histéresis y el circuito saturado.

1.2 Planteamiento del problema

El movimiento Browniano clásico se caracteriza por ser un fenómeno natural de tipo estocástico y con propiedades definidas como lo son la distribución de probabilidad Gaussiana, un valor de $DFA \sim 1.5$, Análisis de Fluctuaciones sin Tendencia, una ley de escalamiento entre frecuencias y potencias con valor ~ -2 y una ley de escalamiento fija entre el tiempo y el desplazamiento cuadrático medio de la partícula, pero, ¿Es posible la generación de MB a partir de un sistema electrónico determinista, cuya dinámica cumpla con las características básicas del movimiento Browniano clásico?

1.3 Justificación

El propósito del proyecto aquí presentado se basa sobre tres puntos primordiales:

- La eliminación de la componente estocástica para la generación de la dinámica de tipo Browniana, permitiendo así la reproducibilidad de los resultados.
- Hasta el momento, la idea de la generación de movimiento Browniano de forma determinista solo se ha trabajado de forma teórica, sin haberse llevado a cabo una implementación física.
- Al tener implementado un circuito electrónico capaz de generar movimiento Browniano de forma determinista, se podrá implementar a éste como una fuente generadora de ruido, debido a las propiedades que definen al movimiento Browniano.

Por lo anterior, la implementación de un prototipo electrónico que muestre las características del movimiento Browniano resultará de gran utilidad, teniendo posibles aplicaciones en campos de la medicina, economía, genética y comunicaciones.

1.4 Hipótesis

Mediante la implementación de un circuito electrónico, cuyo comportamiento está definido por un sistema de ecuaciones deterministas, se estará generando una dinámica que cumpla con las características del movimiento Browniano clásico.

1.5 Objetivos

1.5.1 Objetivo general

Implementar un circuito electrónico, capaz de generar una dinámica determinista que cumpla con las características propias del movimiento Browniano clásico.

1.5.2 Objetivos específicos

- Estudiar y caracterizar un sistema de ecuaciones diferenciales para generación de multi-enroscados, validar su dinámica y comportamiento al modificar sus diferentes parámetros.
- Definir los parámetros para los cuales el sistema utilizado para la generación de multi-enroscados, tenga comportamiento disipativo inestable (UDS).
- Definir los parámetros para los cuales el sistema utilizado para la generación de movimiento Browniano determinista, tenga comportamiento disipativo inestable (UDS).
- Diseñar e implementar un circuito electrónico, capaz de generar dinámica determinista con características definidas para movimiento Browniano clásico.
- Estudiar y caracterizar los parámetros de control del sistema físico, que cumpla con las características del movimiento Browniano clásico. Comprobar la dinámica de tipo Browniana, mediante la aplicación del método de DFA y el estudio de la ley de escalamiento entre las frecuencias generadas por el sistema y sus intensidades.

1.6 Metodología

El movimiento Browniano clásico se ha definido como un movimiento estocástico, y generalmente, se ha modelado mediante la siguiente ecuación propuesta por Langevin [21]:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\gamma y + A_f,\end{aligned}\tag{1.1}$$

A_f es llamada aceleración fluctuante, y se encuentra definida de forma estocástica. La velocidad está dada como $\dot{x} = y$ y la aceleración es $\dot{y}$, donde γ representa la fuerza de fricción, con un valor definido por $\gamma = \frac{6\pi a\eta}{m}$, donde a representa el radio de la partícula, m su masa y η es el coeficiente de viscosidad.

Debido a que la partícula es supuesta de forma esférica inmersa en un fluido, Einstein [20] utilizó la fórmula de Stokes para calcular la varianza de dicha partícula en una dirección dada para un periodo de tiempo τ , de lo que resulta

$$\overline{\Delta x^2} = 2Dt = \frac{RT}{N} \frac{1}{3\pi\eta a} \tau.\tag{1.2}$$

En donde $\overline{\Delta x^2} = \overline{x^2} - \overline{x_0^2}$, D es el coeficiente de difusión del sistema a temperatura T , R representa la constante de los gases y N es el número de Avogadro. El movimiento Browniano ocurre en sistemas en donde los mecanismos para la disipación de energía son distintos de todos aquellos en los cuales se almacena energía [30, 58, 59].

De la definición de Langevin, se sustituye la aceleración fluctuante, por una aceleración (z) , añadiendo una variable de estado formada por una función jerk, obteniendo un sistema de tres ecuaciones que permite modelar el MB de forma determinista. Lo anterior ha sido reportado y publicado [35]. El sistema de ecuaciones que modela movimiento Browniano de forma determinista se encuentra definido de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= y \\
 \dot{y} &= -\gamma y + z \\
 \dot{z} &= -\alpha_1 x - \alpha_2 y - \alpha_3 z + \alpha_4 \\
 \alpha_4 &= C_1 \left[g \left(\frac{x}{C_2} \right) \right],
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

donde la función $g(x)$ responde a la función de redondeo al entero más cercano a x [60]. Debido a que esta definición resulta ambigua para valores fraccionarios, se adopta la siguiente regla:

$$g = \left\{ \begin{array}{l} \text{Redondeo hacia arriba tomando } \lfloor x + 0.5 \rfloor \\ \text{Redondeo hacia abajo tomando } \lceil x - 0.5 \rceil \\ \text{Redondeo a números pares para evitar influencia estadística} \end{array} \right\}$$

Éste modelo muestra en su tercera ecuación, el cambio de la aceleración de la partícula con respecto del tiempo, lo cual es conocido como jerk [36]. La ecuación jerk ha sido estudiada por Campos-Cantón y colaboradores [61].

La metodología implementada para la realización del presente trabajo se encuentra resumida en la *Fig. 1.1*, la cual consta de las siguientes etapas:

- Selección de modelos matemáticos a utilizar. Un modelo que describa un sistema generador de multi-enroscados y el sistema de ecuaciones que describe al movimiento Browniano determinista.
- Simulación de los sistemas mediante la utilización de métodos numéricos en la plataforma de desarrollo MatLab.
- Conversión del sistema de ecuaciones diferenciales a su equivalente en bloques de integración.
- Simulación y validación del sistema en la plataforma de desarrollo Multisim.
- Diseño y construcción de los osciladores en base a lo simulado.

- Construcción de las interfaces virtuales necesarias para poder automatizar el proceso de adquisición de señales.

- Caracterización de la dinámica obtenida mediante:

Construcción de diagramas de Bifurcación.

Análisis de Fluctuaciones sin Tendencia.

Análisis del espectro de potencias.

Espacios de Fase.

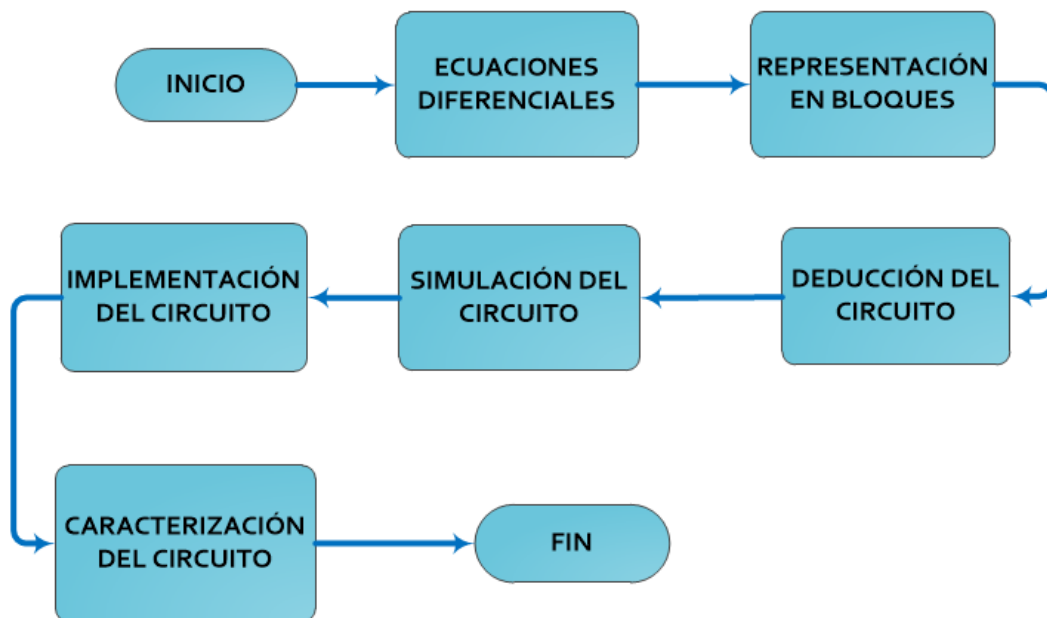


Figura 1.1: Diagrama de flujo de la metodología implementada.

La utilización de métodos numéricos, en el estudio de la dinámica de los modelos a utilizar, conlleva el análisis de los puntos fijos del sistema, lo cual permitirá definir las regiones de valores en base a las variables del modelo, para poder realizar la posterior simulación del sistema. Además, de que dicha simulación numérica, se realizará de forma análoga a lo implementado en el sistema físico, por lo que se podrán mostrar diagramas comparativos entre la respuesta ideal del sistema con lo obtenido en el experimento. La instrumentación virtual es un concepto introducido por la compañía National Instruments (NI), como

respuesta a la inquietud de poder utilizar una computadora personal para desarrollar mediciones al igual que cualquier otro instrumento de laboratorio [62]; dicha instrumentación se ejecuta desde una computadora con funciones definidas desde su programación.

Al software responsable de dicha idea se le dió el nombre de *Laboratory Virtual Instrument Engieneering Workbench (LabVIEW)*. Por lo anterior, se define a la instrumentación virtual como un sistema de mediciones, análisis y control de señales físicas, a través, de un computador mediante la generación y aplicación de instrumentos virtuales [62–64]. Las interfaces virtuales que se utilizarán para desarrollar la caracterización de los sistemas estarán basadas en máquinas de estados, las cuales se definen como; modelos de comportamiento de un sistema con entradas y salidas, donde las salidas dependen no solo de las señales de entrada actuales, si no también a las anteriores. La *Fig. 1.2* representa el esquema general de la máquina de estados finita implementada para el desarrollo de los experimentos. Una vez desarrollada la caracterización del circuito y por ende la adquisición de las variables de estado a analizar, se procede a realizar el análisis de las series de tiempo, utilizando métodos descritos con anterioridad, como lo es el Análisis de Fluctuaciones sin Tendencia, con el fin del poder identificar regiones de operación del sistema donde la respuesta obtenida concuerde con las características definidas por el movimiento Browniano clásico.

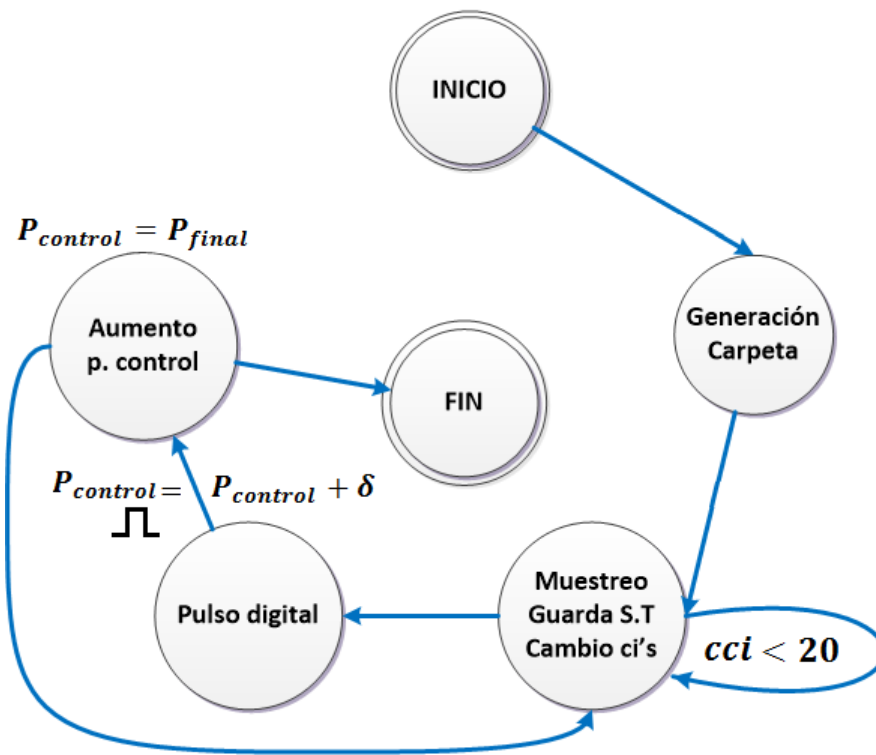


Figura 1.2: Máquina de estados que describe las interfaces virtuales diseñadas.

1.7 Distribución de la tesis

El resto del documento se encuentra organizado de la siguiente manera: en el *capítulo 2* se describen los conceptos básicos sobre sistemas dinámicos, al igual que la definición de las UDS's. La implementación de los sistemas, así como el proceso empleado para la adquisición de señales mediante interfaces virtuales se puede apreciar en el *capítulo 3*. El procesamiento de las señales obtenidas de los circuitos implementados se muestra en el *capítulo 4*, donde se aprecian los diagramas de DFA, ley de potencias, distribuciones de probabilidad y comportamiento del desplazamiento cuadrático medio de las series temporales del sistema analizado. Por último, en el *capítulo 5*, se detallan las conclusiones obtenidas a lo largo del trabajo. En los apéndices se podrán encontrar las descripciones de los métodos estadísticos con los cuales se caracterizó la dinámica del circuito, los análisis de corrientes de Kirchhoff para obtener las ecuaciones características de las distintas configuraciones de los amplificadores operacionales implementados en el trabajo, así como

recursos de programación utilizados para la obtención de resultados.

2

Sistemas Dinámicos

La teoría de sistemas dinámicos es una disciplina cuyo objetivo recae en el modelado, simulación y comprensión de sistemas complejos. Sus orígenes los podemos situar en los estudios de Newton sobre la mecánica celeste [65] y posterior desarrollo con los trabajos de Henri Poincaré [66], quien sentó las bases para el estudio cualitativo de sistemas de ecuaciones diferenciales. Es ahora que, gracias a los trabajos matemáticos como los de Lyapunov [67], junto con los avances tecnológicos en el área de la computación, el estudio de éste tipo de sistemas se ve favorecido. El fenómeno de sistemas dinámicos aparece, implícitamente, en cualquier área de la ciencia, desde la reacción oscilante Belousov-Zhabotinsky [68] en química, hasta el sistema hipercaótico de Lorenz [69], en los complejos movimientos de la mecánica planetaria y en el surgimiento de bifurcaciones en sistemas ecológicos [71].

Los sistemas dinámicos son, de una forma conceptual, conjuntos de agentes que realizan interacciones cuantificables entre sí [72, 73], de acuerdo a una serie de reglas que rigen

éste comportamiento; ejemplos de sistemas dinámicos los encontramos en el sistema solar [65], el comportamiento climatológico [2], el crecimiento de cristales [74], por mencionar algunos. Formalmente un sistema dinámico puede ser definido como una descripción matemática del estado de un sistema a lo largo del tiempo, donde éste puede ser una función tanto continua como discreta. Un ejemplo de la representación de un sistema dinámico en el que el tiempo, t , es una variable continua es representado por un sistema de n ecuaciones diferenciales autónomas de primer orden, como el siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= F_n(x_1, x_2, \dots, x_n),\end{aligned}\tag{2.1}$$

donde x es un vector de dimensión n .

Todo sistema dinámico puede ser concebido como un modelo matemático, el cual consiste de dos componentes importantes; el espacio de fase y la dinámica.

- **Espacio de Fase:** El espacio de fase es la representación de todos los posibles estados del sistema [75], el cual muestra la evolución temporal, esto da como resultado un “camino” a lo largo del tiempo conocido como órbita, o trayectoria del sistema.
- **Dinámica:** La dinámica de un sistema responde a la regla de cambio o evolución del mismo sistema a lo largo del tiempo; es una regla de evolución que convierte un punto en el espacio de fase en una órbita del sistema [73, 75], es decir, es la función que gobierna el comportamiento temporal del modelo.

2.1 Tipos de Sistemas Dinámicos

La teoría de sistemas dinámicos puede considerarse como una herramienta especial que proporciona principios generales para conceptualizar y formalizar las complejas interacciones entre los componentes de cualquier sistema, desde la perspectiva de su evolución

temporal, pero para que ésta rama de la investigación pueda realizar las aproximaciones propias al sistema sujeto a estudio, es fundamental la identificación del sistema dinámico. Dicho sistema puede ser modificado en base a las variables que lo componen, las interacciones entre éstas o la misma construcción que el sistema posea [76], es por eso que resulta de vital importancia clasificar a los sistemas dinámicos en pequeños grupos que comparten ciertas características entre sí.

2.1.1 Sistemas lineales y Sistemas no lineales

Con base a la dinámica que presenta un sistema dinámico es posible clasificarlos en dos tipos; sistemas dinámicos lineales y sistemas dinámicos no lineales, [75].

Un sistema dinámico lineal; es aquel en el que las ecuaciones que describen su evolución temporal poseen términos lineales y que a lo largo del tiempo su respuesta se dirige a un solo punto o atractor; pero la linealidad se encuentra relacionada a dos propiedades que debe cumplir el sistema:

- Proporcionalidad: Ésta propiedad indica que un sistema lineal, al cual se multiplican sus entradas por un escalar cualquiera, la salida del mismo se verá afectada por un factor de igual magnitud que el de entrada.

$$f(\alpha x) = \alpha f(x). \quad (2.2)$$

- Superposición: La respuesta de un sistema puede ser descompuesta como la suma de dos, o más, respuestas de acuerdo al número de entradas del sistema.

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2). \quad (2.3)$$

Un sistema dinámico no lineal se encuentra descrito, en sus ecuaciones de movimiento, con términos de tipo no lineal, como multiplicaciones entre las variables del sistema, potencias de grado dos, o superior, funciones no lineales, entre otros; los cuales poseen una dinámica que no responde al principio de superposición. Un ejemplo de éste tipo de sistemas lo podemos encontrar en la ecuación del péndulo amortiguado:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + v\frac{d\theta}{dt} + \sin\theta = T\sin(2\pi ft). \quad (2.4)$$

2.1.2 Sistemas autónomos y Sistemas no autónomos

Un sistema dinámico también puede ser categorizado en base a su dependencia temporal, dividiéndose éstos en sistemas autónomos y sistemas no autónomos, [75].

- **Autónomo:** Un sistema dinámico autónomo es aquel en el que sus ecuaciones descriptoras no dependen explícitamente de la variable temporal. Por ejemplo:

Sea el sistema dinámico de la forma $\dot{x} = f(x)$, donde la función f no depende explícitamente de la variable independiente t , si no únicamente de la variable x y de parámetros de control del sistema en sí.

- **No autónomo:** Un sistema dinámico no autónomo, al contrario de uno autónomo, es aquel en el que la variable temporal aparece de forma explícita en las ecuaciones del sistema, ya que la dinámica de éste se encuentra forzada por el término temporal: $\frac{dx(t)}{dt} = F[x(t)]$.

2.1.3 Sistemas de tiempo continuo y Sistemas de tiempo discreto

De acuerdo al periodo de muestreo y representación de datos, se puede clasificar a los sistemas dinámicos como sistemas de tiempo continuo y sistemas de tiempo discreto, [75].

- **Sistemas de tiempo discreto:** Un sistema dinámico de tiempo discreto es aquel en el que el tiempo no fluye de forma continua, si no que éste, como su nombre lo indica, transcurre en periodos finitos de observaciones discretizadas.
- **Sistemas de tiempo continuo:** Un sistema de tiempo continuo es aquel en el que el tiempo fluye de forma continua desde $-\infty$ hasta $+\infty$, pasando por todo el intervalo.

2.2 Análisis Lineal de Sistemas Dinámicos

Sea el sistema:

$$y' = f(y), \quad (2.5)$$

donde f no depende del tiempo, es decir, el sistema es de tiempo continuo autónomo.

En el sistema dinámico representado por la *ecuación 2.5* existe un punto y_0 tal que $y'(y_0) = f(y_0) = 0$, al cual se le denomina punto crítico, estacionario o de equilibrio [75]. La importancia de los puntos de equilibrio de los sistemas autónomos se debe a que éstos corresponden a soluciones constantes que determinan el comportamiento cualitativo de las soluciones generales del sistema, por lo tanto, es de gran importancia determinar la naturaleza de éstos en un sistema dinámico. Los puntos fijos se definen como aquellos puntos en el espacio de fase en el que, para toda derivada respecto al tiempo de las variables de estado, el resultado de la evaluación es igual a cero.

2.2.1 Sistemas unidimensionales

El abordaje formal para analizar la naturaleza de un punto fijo se encuentra definido por medio de la expansión en series de Taylor de la función $f(x)$, del sistema mostrado en la *ecuación 2.6* [75], para valores en x cercanos al punto fijo x_0 .

$$\dot{x} = f(x), \quad (2.6)$$

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \frac{df}{dx} + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1}{6}(x - x_0)^3 \frac{d^3 f}{dx^3} + \dots, \quad (2.7)$$

donde todas las derivadas son evaluadas en el punto $x = x_0$.

La evaluación del primer término de la *ecuación 2.7*, del lado derecho de la igualdad, en el punto fijo, es, por definición, igual a cero. La expansión en series de Taylor dice que la función $f(x)$ en las cercanías al punto x_0 se encuentra determinada tanto por los valores

de las derivadas evaluadas en el punto fijo, como por las diferencias entre $x - x_0$. Ésta información, junto con el sistema dinámico de la *ecuación 2.6*, es suficiente para predecir el comportamiento del sistema en las vecindades al punto fijo; de hecho, si se considera a $x - x_0$ como una nueva variable, la cual representa la distancia con la que se aleja la trayectoria con respecto al punto fijo y se omiten las derivadas de orden superior, es decir, truncamos la serie de Taylor hasta el primer término, se satisface la ecuación

$$\dot{x} \equiv \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} x, \quad (2.8)$$

cuya solución es:

$$x(t) = x(0)e^{\lambda t}, \quad (2.9)$$

donde $\lambda \equiv \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0}$, ésto es el valor característico del punto fijo.

Si $\lambda < 0$ la trayectoria del sistema se aproximará de forma exponencial a un punto fijo llamado nodo, caso contrario si el valor de $\lambda > 0$, lo que indica que la trayectoria será repelida, o expulsada, de forma exponencial del punto fijo, denominandose a éste un punto repulsor.

λ	Tipo de punto fijo
< 0	Nodo
> 0	Repulsor

Cuadro 2.1: Tipo de punto fijo de acuerdo a la ubicación del valor propio en un sistema de 1D.

Aunque éste resultado, con base a las características del punto fijo, *Cuadro 2.1*, es aplicable únicamente a sistemas unidimensionales, es extrapolable a sistemas de orden superior, donde mientras el orden del sistema sea mayor, también la variedad en la dinámica que éste puede presentar.

2.2.2 Sistemas de dos dimensiones

Para considerar el caso de un sistema de segundo orden se asume que el sistema dinámico puede ser expresado como un sistema de ecuaciones acopladas de primer orden, cuyas variables de estado serán denotadas como x y y , como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y).\end{aligned}\tag{2.10}$$

El conocimiento de la dinámica del sistema se realiza mediante el seguimiento de las trayectorias en el espacio de estados xy . De igual forma que en un sistema unidimensional, los puntos fijos del sistema de la *ecuación 2.10* desempeña un papel importante en el comportamiento del sistema; donde, a diferencia del sistema de dimensión uno, los puntos fijos se componen por un par de coordenadas ubicados en el espacio de estados (x_0, y_0) , y son aquellos que satisfacen la condición:

$$\begin{aligned}f(x, y) &= 0 \\ g(x, y) &= 0.\end{aligned}\tag{2.11}$$

Tanto el tipo de punto fijo así como el comportamiento de las trayectorias del sistema en las vecindades a éste se encuentran definidas con base a las derivadas de primer orden de las funciones f y g evaluadas en el punto fijo del sistema, como en el sistema unidimensional, sin embargo, debido a que, tanto las funciones f como g dependen tanto de la variable x como y , se deben de considerar las cuatro derivadas parciales del sistema.

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial g}{\partial x}, \quad \frac{\partial g}{\partial y}.\tag{2.12}$$

Al sistema de derivadas parciales, *ecuación 2.12*, se le conoce como Jacobiano del sistema, el cual es representado por una matriz cuadrada:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

El método que a continuación se describe es, en principio, la base para encontrar los valores característicos de cualquier sistema. Una vez obtenido el Jacobiano del sistema, se le resta λ a cada elemento de la diagonal principal y se iguala la matriz a cero:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} - \lambda \end{bmatrix} = 0. \quad (2.14)$$

Si se resuelve el determinante del sistema mostrado en la *ecuación 2.14*, se obtiene como resultado el polinomio característico de los valores propios del modelo, donde la magnitud de los valores λ 's solo dependen de las derivadas de las funciones evaluadas en el punto fijo:

$$\lambda^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) \lambda + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} \right) = 0. \quad (2.15)$$

Para un sistema de dos dimensiones [75, 77], se puede determinar la naturaleza de los puntos fijos del sistema de dos formas, de acuerdo a la ubicación de los valores propios, *Cuadro 2.2*, o en base al determinante, Δ , y la traza de la matriz del Jacobiano, $Tr J$, *Cuadro 2.3*.

λ_1	λ_2	Tipo de punto fijo
< 0	< 0	Nodo atractor
> 0	> 0	Nodo repulsor
> 0	< 0	Punto silla
< 0	> 0	Punto silla

Cuadro 2.2: Tipo de punto fijo de acuerdo a la ubicación de los valores propios en un sistema 2D, sí y solo sí $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\Delta, \quad TrJ$	$TrJ < 0$	$TrJ > 0$
$\Delta > \frac{1}{4}TrJ^2$	Nodo espiral	Espiral repulsor
$0 < \Delta < \frac{1}{4}TrJ^2$	Nodo	Repulsor
$\Delta < 0$	Punto silla	Punto silla

Cuadro 2.3: Tipo de punto fijo de acuerdo Traza, Tr , y determinante, Δ , de la matriz del Jacobiano, J , para un sistema 2D.

2.2.3 Sistemas de tres dimensiones

De forma similar, a los sistemas de orden inferior, se puede determinar la clasificación de los puntos fijos de un sistema en tres dimensiones, el cual, de forma general, está definido de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= f(x, y, z) \\
 \dot{y} &= g(x, y, z) \\
 \dot{z} &= h(x, y, z),
 \end{aligned}
 \tag{2.16}$$

donde el sistema descrito representa a un sistema de ecuaciones autónomas. Los puntos fijos de éste tipo de sistemas está definido, al igual que en los casos anteriores, por el conjunto de derivadas igualadas a cero. La naturaleza de los puntos fijos, entonces, se encontrará determinada por los tres valores característicos de la matriz Jacobiana.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

Al igual que en el caso bidimensional, se obtiene la ecuación característica del sistema, la cual tendrá tres valores propios, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, los cuales servirán para determinar la naturaleza de los puntos fijos del sistema.

$$\lambda^3 + p\lambda^2 + q\lambda + r = 0. \quad (2.18)$$

Una vez resuelta la ecuación característica del sistema, es posible determinar la naturaleza de los puntos fijos en base a las posibles combinaciones de valores que éstos puedan presentar, pero hay que considerar tres casos:

- 1.- Los valores característicos son reales y distintos de cero.
- 2.- Los tres valores son reales y, al menos dos, son iguales a cero.
- 3.- Existe un valor real y dos complejos conjugados.

Teniendo ésto en cuenta, y separando cada valor propio en sus componentes real e imaginaria, $\lambda_{1,2,3} = \sigma_{1,2,3} + i\omega_{1,2,3}$, se puede realizar la siguiente clasificación de los puntos fijos de un sistema en tres dimensiones:

σ_1	σ_2	σ_3	ω_1	ω_2	ω_3	Tipo de punto fijo
< 0	< 0	< 0	$= 0$	$= 0$	$= 0$	Nodo
< 0	< 0	< 0	$= 0$	> 0	$= -\omega_2$	Nodo espiral
> 0	> 0	> 0	$= 0$	$= 0$	$= 0$	Nodo repulsor
> 0	> 0	> 0	$= 0$	> 0	$= -\omega_2$	Espiral repulsor
< 0	< 0	> 0	$= 0$	$= 0$	$= 0$	Punto silla índice 1
< 0	< 0	> 0	> 0	$= -\omega_1$	$= 0$	Espiral punto silla índice 1
< 0	> 0	> 0	$= 0$	$= 0$	$= 0$	Punto silla índice 2
< 0	> 0	> 0	$= 0$	> 0	$= -\omega_2$	Espiral punto silla índice 2

Cuadro 2.4: Tipo de punto fijo de acuerdo a la ubicación de los valores propios en un sistema 3D.

El índice, indicado en el *Cuadro 2.4*, se refiere al número de valores propios que poseen componente real positiva [75]. El comportamiento de cada una de las configuraciones de los valores propios se puede resumir de la siguiente manera:

- **Nodo:** Todas las trayectorias, en la vecindad al punto fijo, son atraídas a éste sin generar ningún lazo, o envolvente, alrededor del punto fijo.
- **Nodo espiral:** Las trayectorias oscilan alrededor del punto fijo conforme se aproximan a éste, formando una espiral teniendo como centro al punto fijo.
- **Nodo repulsor:** En las vecindades al punto fijo, todas las trayectorias son repelidas, divergen, del punto fijo.
- **Espiral repulsor:** Las trayectorias oscilan alrededor de un punto fijo mientras son repelidas del punto fijo.
- **Punto silla de índice 1:** Las trayectorias se aproximan al punto silla en un plano, mientras son repelidas a lo largo de una curva de salida.
- **Espiral punto silla de índice 1:** Las trayectorias oscilan alrededor del punto fijo mientras se aproximan al plano de atracción del punto fijo.

- Punto silla de índice 2: Las trayectorias se aproximan al punto silla en un plano, mientras son repelidas a lo largo de una curva de salida.
- Espiral punto silla de índice 2: Las trayectorias oscilan alrededor del punto silla sobre una superficie, mientras éstas son repelidas del punto fijo.

2.2.4 Sistemas Disipativos Inestables, UDS

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales autónomas de la *ecuación 2.16*, cuando sus puntos de equilibrio corresponden a puntos de tipo silla, el cual puede ser expresado de la siguiente forma:

$$\dot{X} = AX + B, \quad (2.19)$$

donde $X = [x, y, z]^T \in \mathbb{R}^3$ es el vector de estados, $B = [b_1, b_2, b_3]^T \in \mathbb{R}^3$ es un vector real y $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^3$ es un operador lineal, para el cual los puntos fijos del sistema se encuentran ubicados en $X^* = -A^{-1}B$. El comportamiento del sistema se encuentra regido por los coeficientes de la matriz A , la cual posee una variedad estable y otra inestable, con base a los puntos fijos del sistema. La diversidad de puntos de equilibrio de tipo silla poseen una variedad estable así como una inestable, las cuales son responsables tanto del estiramiento como plegamiento sucesivo en la respuesta del sistema, lo que proporciona la generación de atractores caóticos con múltiples enroscados [78–80], tomando en cuenta que el vector B conmuta a lo largo del tiempo, de lo contrario se obtendría una dinámica totalmente inestable que no resulta en un atractor definido.

Los puntos de equilibrio de tipo silla pueden ser caracterizados en dos clases de acuerdo a sus valores propios, λ 's.

- Los puntos fijos de tipo silla son estables en una de sus componentes, pero inestables y oscilatorias en las otras dos. La componente estable se encuentra relacionada con un valor propio real negativo, $\sigma_1 < 0$, $\omega_1 = 0$, mientras que las componentes inestables son descritas por los dos valores propios complejos conjugados, $\sigma_2 = \sigma_3 > 0$, $\omega_2 = -\omega_3 > 0$.

- Los puntos fijos de tipo silla que son estables en dos de sus componentes, pero inestables en una. Las componentes oscilatorias se relacionan con valores propios complejos conjugados, $\sigma_2 = \sigma_3 < 0$, $\omega_2 = -\omega_3 > 0$, mientras que la componente inestable corresponde a un valor propio real positivo, $\sigma_1 > 0$, $\omega_1 = 0$.

Si el sistema dinámico descrito por la *ecuación 2.16* posee una configuración en sus valores propios correspondiente a un punto fijo de tipo silla y la suma de sus valores propios es menor a cero, entonces el sistema es un sistema disipativo inestable, UDS por sus siglas en inglés.

Sistemas Disipativos Inestables tipo I

Sea un sistema dado por la *ecuación 2.16*, con valores propios $\lambda_{1,2,3}$, se dice que es un sistema disipativo inestable de tipo *I* sí, y solo sí, $\sum_{i=1}^3 \lambda_i < 0$, y uno de sus valores propios es real negativo sin componente imaginaria, además de que los otros dos valores propios son complejos conjugados con componente real positiva.

Un ejemplo de éste tipo de sistemas es el descrito por el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales, el cual posee una función lineal en trozos, PWL por sus siglas en inglés.

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -0.2465 & 1 \\ -6.8438 & -2.006 & -1.1102 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

donde

$$b_3 = \begin{cases} 0, & \text{sí } x_1 < 0.3021 \\ 5.535, & \text{sí } x_1 \geq 0.3021 \end{cases} \quad (2.21)$$

Los valores propios asociados a la parte lineal del sistema, matriz de coeficientes A , son: $\lambda_1 = -1.873$, $\lambda_2 = 0.2581 + i2.0445$, $\lambda_3 = 0.2581 - i2.0445$, donde $\sum_{i=1}^3 \lambda_i = -1.3567$, lo que corresponde a un sistema disipativo inestable de tipo *I*, [80].

Sistemas Disipativos Inestables tipo II

Sea un sistema dinámico como el descrito por la *ecuación 2.16*, con valores propios $\lambda_{1,2,3}$, se dice que es un sistema disipativo inestable de tipo *II* sí, y solo sí, $\sum_{i=1}^3 \lambda_i < 0$, y uno de sus valores propios es real positivo sin componente imaginaria, además de que los otros dos valores propios son complejos conjugados con componente real negativa.

Un ejemplo de éste tipo de sistemas es el descrito por el siguiente grupo de ecuaciones diferenciales, el cual posee una función PWL:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.15 & -10 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

donde:

$$b_3 = \begin{cases} 0, & \text{sí } x_1 < 1 \\ -10, & \text{sí } x_1 \geq 1 \end{cases} \quad (2.23)$$

Los valores propios asociados a la parte lineal del sistema, matriz de coeficientes A , son: $\lambda_1 = 0.015$, $\lambda_2 = -0.05075 + i3.1237$, $\lambda_3 = -0.05075 + i3.1237$, donde $\sum_{i=1}^3 \lambda_i = -1$, lo que corresponde a un sistema disipativo inestable de tipo *II*, [80].

3

Implementación Electrónica

En décadas recientes se ha intensificado el estudio de fenómenos naturales mediante la utilización de modelos basados tanto en dispositivos analógicos como discretos, como el estudio de reacciones químicas [81], sistemas biológicos [82] y neuronales [83]. Desde un enfoque tradicional, dichos fenómenos serían abordados de forma teórica mediante la utilización de métodos numéricos, los cuales se encuentran limitados a las características del ordenador donde se desarrollen las simulaciones, es por eso que la utilización de dispositivos electrónicos continuos en el tiempo emerge como una alternativa [84].

La implementación de sistemas mediante amplificadores operacionales es capaz de suprimir las limitantes del cálculo computacional, generando así un sistema análogo que representa al modelo matemático sometido a estudio.

3.1 Sistema generador de multi-enroscados

Una clase de sistemas dinámicos no lineales, y continuos en el tiempo, es capaz de producir comportamiento caótico, éstos sistemas no presentan dependencia temporal, sin embargo, es posible conocer el estado del sistema a través de las condiciones iniciales donde se evalúe a éste.

Cuando se habla de caos, dado que no existe una definición universal para éste, se hace alusión a una evolución temporal irregular y altamente sensible a variaciones en las condiciones iniciales del sistema. Aunque no hay una definición global del caos, se conocen los principales componentes que un sistema debe tener para poseer comportamiento caótico [73].

- **Oscilaciones:** Las trayectorias del sistema no se deben aproximar a un punto fijo, una órbita periódica o cuasiperiódica, es decir, el sistema debe de seguir oscilando cuando $t \rightarrow \infty$.
- **Sensibilidad a las condiciones iniciales:** Cuando un sistema caótico es evaluado en un punto de inicio, condición inicial x_0 , y después se le evalúa en el punto $x_0 + \epsilon$, siendo ϵ una cantidad muy pequeña, el sistema presentará una respuesta diferente, aunque pueda ser cualitativamente similar.
- **Determinismo:** Un sistema caótico no es estocástico o aleatorio, contrario a lo que el término caótico pudiera inferir. El comportamiento irregular surge a partir de la no linealidad del sistema, volviéndolo en un sistema determinista.

En la mayoría de los casos, para que un sistema dinámico no lineal presente comportamiento caótico debe tener tanto componentes positivas como negativas en sus valores propios, es decir, debe poseer puntos fijos de tipo silla. Éstos puntos de equilibrio generan un estiramiento y doblamiento en las trayectorias del sistema, lo que genera atractores extraños con múltiples enroscados [85]. El nombre de éste tipo de puntos fijos se debe a la figura que genera el campo vectorial del sistema, el cual se asemeja a una silla para montar caballos, *Fig. 3.1*.

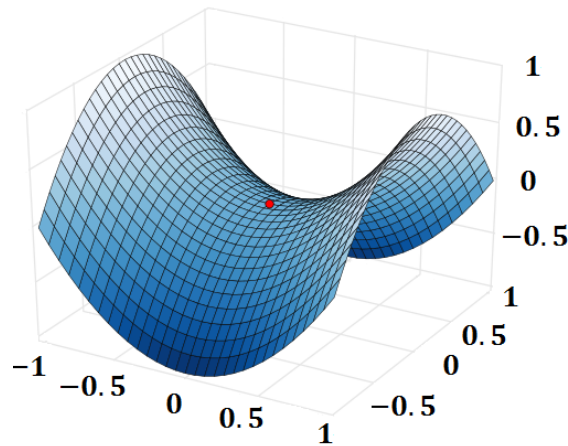


Figura 3.1: Visualización de un punto fijo de tipo silla para el sistema $z = x^2 - y^2$.

El término multi-enroscado, también conocido como multi-scroll's o multi-enrollamientos, se refiere a la generación de un atractor con un mínimo de tres enroscados, éste tipo de sistemas fué propuesto por Suyken y Vanderwall a principios de la década de los noventa [45]. Actualmente existen diferentes aproximaciones para la generación de atractores con múltiples enroscados, como el método de añadir puntos de ruptura basado en la función de Chua [49], sistemas de leyes conmutadas [52, 61], sistemas con funciones lineales en trozos [86], o PWL por sus siglas en inglés, el uso de la función senoidal [53], la utilización de la función de histeresis [55] y la implementación de funciones de saturación no lineales [56, 57], Saturated Non Lineal Function (*SNLF*), siendo ésta última en la que se basa el modelo a estudiar.

3.1.1 Modelo Matemático

El sistema generador de multi-enroscados se encuentra descrito por un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas descritas en la *ecuación 3.1*, donde la función no lineal saturada se encuentra representada por la variable $f(x; k, h, p, q)$ [87], la cual, debido a su fácil implementación mediante amplificadores operacionales configurados como comparadores de voltaje, puede tener tantos niveles de saturación como número de enroscados se deseen. En éste caso se implementa una *SNLF* de dos, tres, cuatro y cinco niveles, generando el mismo número de enroscados. El sistema se compone de tres variables de estado, x, y, z , los coeficientes a, b, c, d son valores reales positivos que satisfacen la con-

dición $0 < a, b, c, d < 1$, a efecto de llevar a el sistema a un régimen de operación donde el modelo posea puntos fijos de tipo silla, específicamente, donde los puntos fijos del sistema respondan a un sistema disipativo inestable de tipo uno, UDS I:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= z \\ \dot{z} &= -ax - by - cz + df(x_{(k,h,p,q)})\end{aligned}\tag{3.1}$$

La función *SNLF*, de forma matemática, se encuentra definida como:

$$f(x; k, h, p, q) = \sum_{i=-p}^q f_i(x_{(h,k)})\tag{3.2}$$

donde k es el voltaje utilizado en cada comparador de voltaje que conforma a la función de saturación, V_i^* , $i = 1 - 4$, *Fig. 3.2, ecuación 3.3*, h es el valor de la resistencia, e intensidad, con la que se suma la señal del comparador de voltaje, $\frac{R_5^*}{R_i^*}$, $i = 1 - 4$, *Fig. 3.2, ecuación 3.3*, $p = q$ y es el mínimo entero resultado de dividir el número de enroscados a generar entre dos, $5/2 = 2.5$, $p = 2$, *Fig. 3.2, ecuación 3.3*.

Haciendo uso de amplificadores operacionales, la implementación de la función de saturación requiere $n - 1$ operacionales para la generación de n enroscados, por lo que, dado el número máximo de enroscados a generar, se requiere de cuatro amplificadores operacionales para la generación de la función de saturación.

El funcionamiento e implementación de la función de saturación se encuentra determinado por tres configuraciones básicas de amplificadores operacionales, *Fig. 3.2 Izquierda*. El amplificador como comparador de voltaje, *ecuación A.18*, el cual genera los niveles de saturación, también llamados mesetas, mismas que corresponden a las secciones planas de la función de saturación, *Fig. 3.2 Derecha*, secciones en las que el sistema generará los enroscados, el amplificador sumador, *ecuación A.9*, con el que se suman los niveles de saturación determinados por el número de comparadores de voltaje, generándose la forma de la señal mostrada en la *Fig. 3.2 Derecha*, y el amplificador inversor, *ecuación A.4*, que genera una ganancia conjunta con el amplificador inversor, referida de ahora en adelante como G_1 , la cual determina la amplitud con la que la función es inyectada al sistema y, por

ende, determina el número de enroscados a generar.

$$SNLF = -R_5^* \left(\frac{V_1^*}{R_1^*} + \frac{V_2^*}{R_2^*} + \frac{V_3^*}{R_3^*} + \frac{V_4^*}{R_4^*} \right) \quad (3.3)$$

$$G_1 = R_5^* \sum_{i=1}^4 \left(\frac{1}{R_i^*} \right)$$

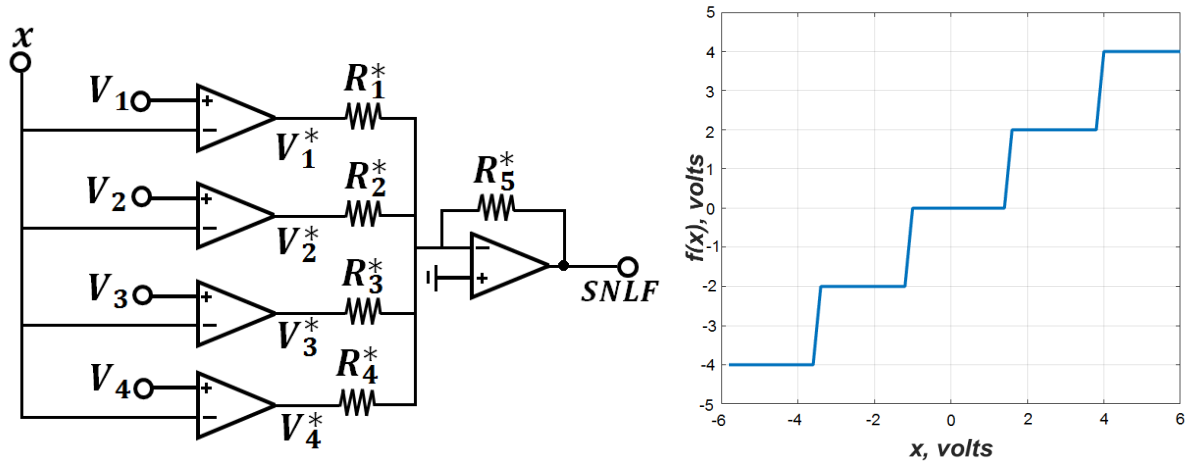


Figura 3.2: Izquierda. Esquema para la implementación de una $SNLF$ de cinco niveles. Derecha. Respuesta de salida de la $SNLF$ de cinco niveles.

A partir del modelo descrito por la *ecuación 3.1*, se puede obtener el polinomio característico del sistema para hacer el análisis del comportamiento de los valores propios de la matriz lineal afín al sistema, lo que nos indicará el rango de valores en el que se podrá operar bajo el régimen descrito por un sistema del tipo UDS *I*. Dicho polinomio característico se encuentra descrito en la *ecuación 3.4*.

Una vez determinado el polinomio característico del sistema, *ecuación 3.5*, es posible explorar los valores de los parámetros de control en busca de la región de operación cuyos valores propios respondan a una configuración de un sistema disipativo inestable de tipo *I*. Ésta búsqueda se realiza mediante la siguiente suposición: $a = b = c$, los cuales son modificados en el rango descrito anteriormente, $0 < a < 1$, dando como resultado las gráficas mostradas en la *Fig. 3.3*.

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -ax & -by & -cz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -df(x; k, h, p, q) \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a & -b & -c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right] = \mathbf{0}$$

$$\left[\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -a & -b & (-c - \lambda) \end{pmatrix} \right] = \mathbf{0} \quad (3.5)$$

$$\lambda^3 + \lambda^2 c + \lambda b + a = 0.$$

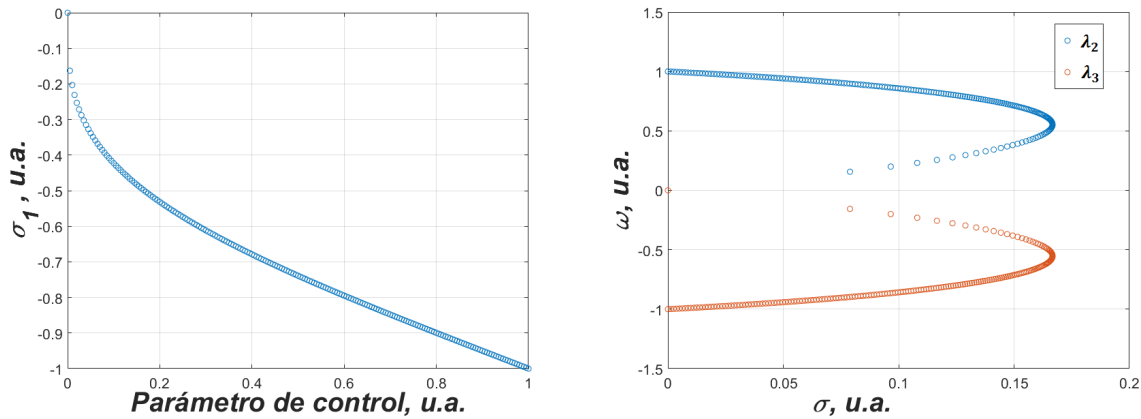


Figura 3.3: Izquierda. Comportamiento del valor propio real a lo largo de la modificación del parámetro de control, a . **Derecha.** Comportamiento de los valores propios complejos conjugados debido a la modificación en el parámetro de control, a .

Separando a cada uno de los valores propios en sus componentes reales e imaginarias, $\lambda_{1,2,3} = \sigma_{1,2,3} + i\omega_{1,2,3}$, en la *Fig. 3.3* se observa el comportamiento tanto del valor propio real puro, así como de los valores propios complejos conjugados. Cabe mencionar que cada combinación de valores explorado, cumple también con la condición de que la sumatoria de sus valores propios sea negativa. Las gráficas indican que todo valor comprendido en el intervalo abierto de cero a uno, el sistema presentará valores propios con una configuración propia de un sistema disipativo inestable de primer tipo, lo que favorecerá la aparición de multi-enroscados.

3.1.2 Implementación electrónica y ecuaciones equivalentes

Una vez que el modelo matemático fué analizado, se realiza la elección del parámetro de control para la implementación electrónica, en éste caso se selecciona $a = b = c = d = 0.7$ debido a que está incluido en el rango de operación del sistema bajo el régimen UDS *I*, además de que ha sido reportado en trabajos previos [87, 88]. La implementación electrónica es realizada considerando las propiedades de cálculo analógico de los amplificadores operacionales, como las mostradas en el capítulo anterior y como lo describe Orponen [84].

En búsqueda de la correcta implementación electrónica, se toma el sistema de ecuaciones descrito por *ecuación 3.1*, el cual, si es integrado a ambos lados de la igualdad, resulta en un conjunto de ecuaciones de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x &= \int y dt \\ y &= \int z dt \\ z &= \int (-ax - by - cz + df(x)) dt. \end{aligned} \tag{3.6}$$

El sistema de ecuaciones integradas se puede representar en un diagrama de bloques, *Fig. 3.4*, mismo que describe de forma general la estructura que debe poseer el circuito electrónico implementado.

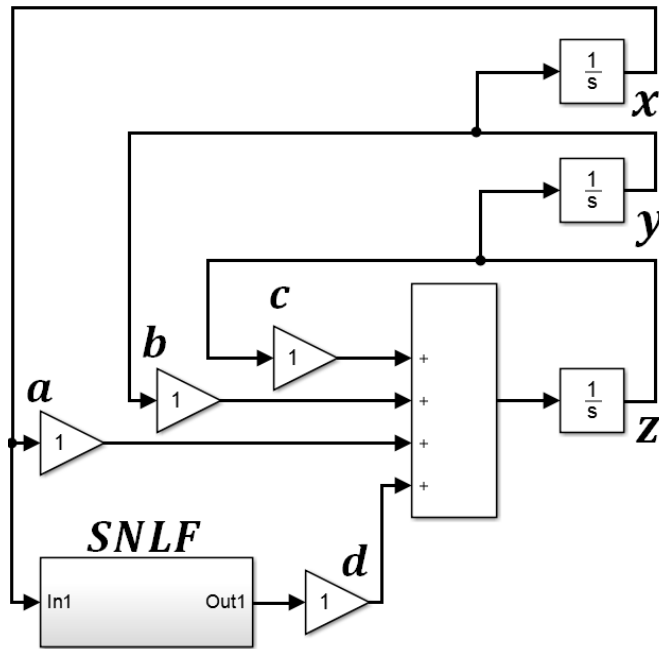


Figura 3.4: Diagrama a bloques del modelo matemático del sistema generador de multi-enroscados.

Tomando en cuenta el diagrama a bloques del sistema de ecuaciones integradas, *ecuación 3.6*, es posible implementar el modelo de forma electrónica haciendo uso de amplificadores operacionales bajo la configuración de un integrador, *ecuación A.17*, *Fig. A.8*, además de sumadores, *ecuación A.9*, *Fig. A.6*, para generar las entradas necesarias de la variable de la tercera ecuación del sistema, inversores de voltaje de ganancia unitaria, *ecuación A.4*, *Fig. A.4*, para poder compensar los cambios de signo que generen los circuitos integradores, así como la función de saturación, *ecuación 3.3*, *Fig. 3.2*.

Tanto la primera como la segunda ecuación del sistema de la *Fig. 3.5*, κ_1 , recuadro azul, κ_2 , recuadro naranja, son implementadas mediante la utilización de un amplificador operacional bajo la configuración de un circuito integrador, que se conecta a un amplificador inversor de ganancia unitaria, respectivamente, esto para compensar el cambio de signo en las variables de estado. La tercera ecuación, κ_3 , recuadro verde, se conforma de un punto suma, en el cual ingresan las tres variables de estado del sistema y la función de saturación, mismas que se encuentran escaladas por un amplificador inversor con ganancia igual a $G = 0.7$, correspondiente al parámetro de control seleccionado, así como de su respectivo integrador.

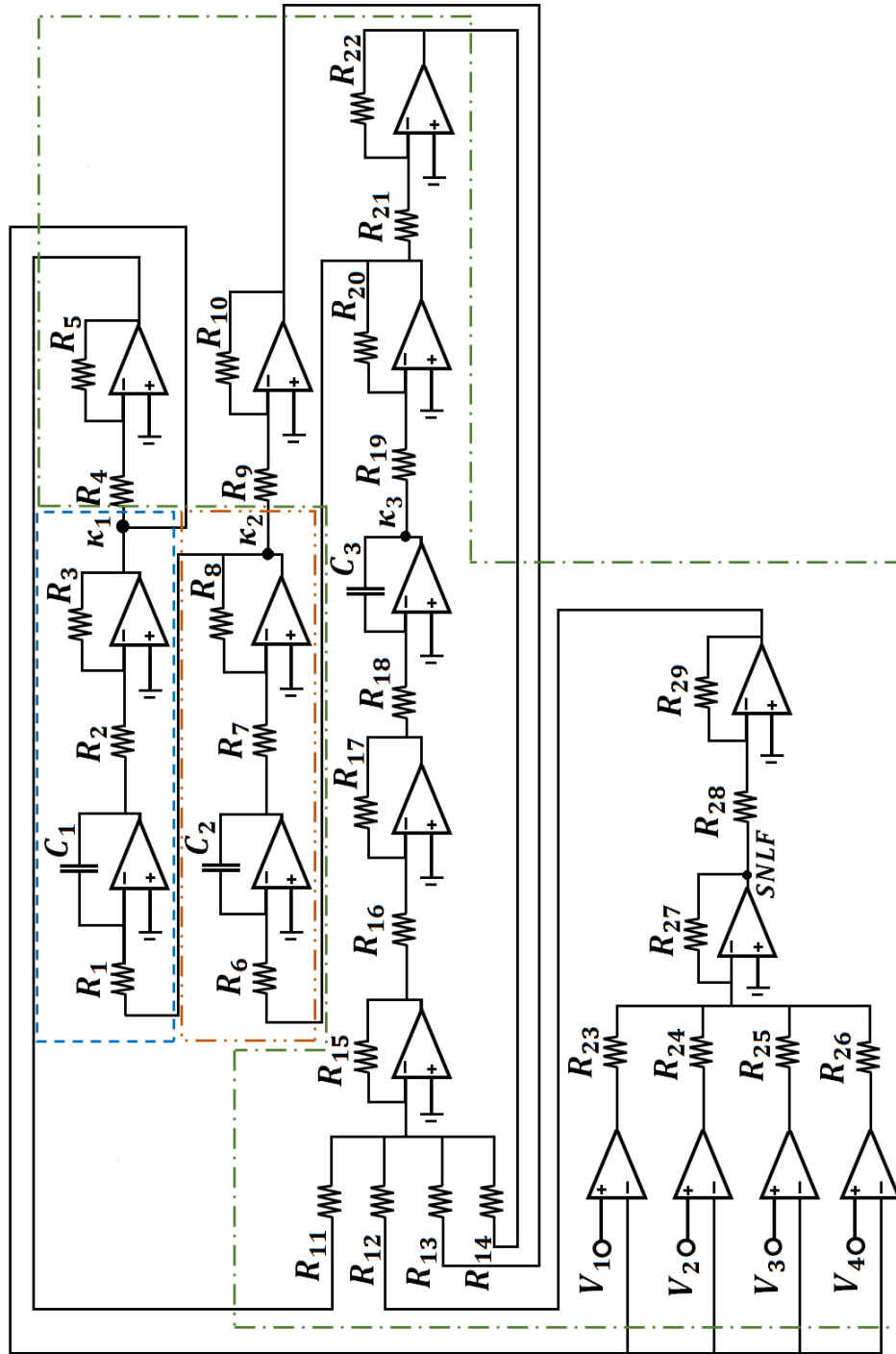


Figura 3.5: Esquema del circuito electrónico implementado para el modelo generador de multi-enroscados. La variable de estado x se encuentra encerrada en el recuadro azul, el recuadro de color naranja corresponde a la variable y , así como el verde a la variable z .

Las ecuaciones equivalentes del sistema mostrado en la Fig. 3.5 se encuentran descri-

tas de la siguiente forma, *ecuación 3.7*, las cuales responden de forma análoga, de acuerdo al análisis de nodos realizado al circuito electrónico con base a la ley de corrientes de Kirchhoff, al comportamiento descrito por el sistema de la *ecuación 3.6*.

$$\begin{aligned}
 \kappa_1 &= \frac{1}{R_1 C_1} \int \left(\frac{R_3}{R_2} \kappa_2 \right) dt = x \\
 \kappa_2 &= \frac{1}{R_6 C_2} \int \left(\frac{R_8}{R_7} \kappa_3 \right) dt = y \\
 \kappa_3 &= \frac{R_{20}}{R_{18} R_{19} C_3} \int \left(-\frac{R_5 R_{15} R_{17}}{R_4 R_{11} R_{16}} \kappa_1 - \frac{R_{10} R_{15} R_{17}}{R_9 R_{13} R_{16}} \kappa_2 - \frac{R_{15} R_{17} R_{22}}{R_{14} R_{16} R_{21}} \kappa_3 \dots \right. \\
 &\quad \left. - \frac{R_{15} R_{17} R_{29}}{R_{12} R_{16} R_{28}} SNLF \right) dt = z
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Donde los factores de ganancia, a, b, c, d , se encuentran descritos por la relación de las siguientes resistencias:

$$\frac{R_5}{R_4} = a = \frac{R_{10}}{R_9} = b = \frac{R_{22}}{R_{21}} = c = \frac{R_{29}}{R_{28}} = d \tag{3.8}$$

Los valores de los elementos utilizados para la implementación electrónica se describen en el *Cuadro 3.1*.

La frecuencia de oscilación del circuito se encuentra dada por el inverso del factor de integración, que corresponde a la relación definida por $\frac{1}{R_1 C_1} = \frac{1}{R_6 C_6} = \frac{1}{R_{18} C_3} = 10kHz$.

La implementación física del sistema se ejecuta en la plataforma de desarrollo *Eagle*, software de diseño de placas de circuito impreso, PCB por sus siglas en inglés, mismo que permite realizar esquemas de circuitos electrónicos para poder ser llevados a una implementación física. En las figuras *Fig. 3.6-3.8* se muestra el esquema generado en Eagle del circuito para su implementación física.

Elementos electrónicos del circuito de la Fig. 3.5					
Elemento	Valor	Tolerancia	Elemento	Valor	Tolerancia
R_1, R_6, R_{18}	$1M\Omega$	10 %	C_1, C_2, C_3	$100pF$	10 %
R_{17}, R_{19}, R_{20}	$1K\Omega$	5 %	$R_5, R_{10}, R_{22}, R_{29}$	$7K\Omega$	5 %
R_4, R_9, R_{21}, R_{28}	$10K\Omega$	5 %	$R_{23}, R_{24}, R_{25}, R_{26}$	$90K\Omega$	10 %
$R_2, R_3, R_7, R_8, R_{11}$	$1K\Omega$	5 %	$R_{12}, R_{13}, R_{14}, R_{15}, R_{16}$	$1K\Omega$	5 %

Cuadro 3.1: Valores de los componentes electrónicos utilizados en la implementación electrónica del modelo generador de hasta cinco multi-enroscados.

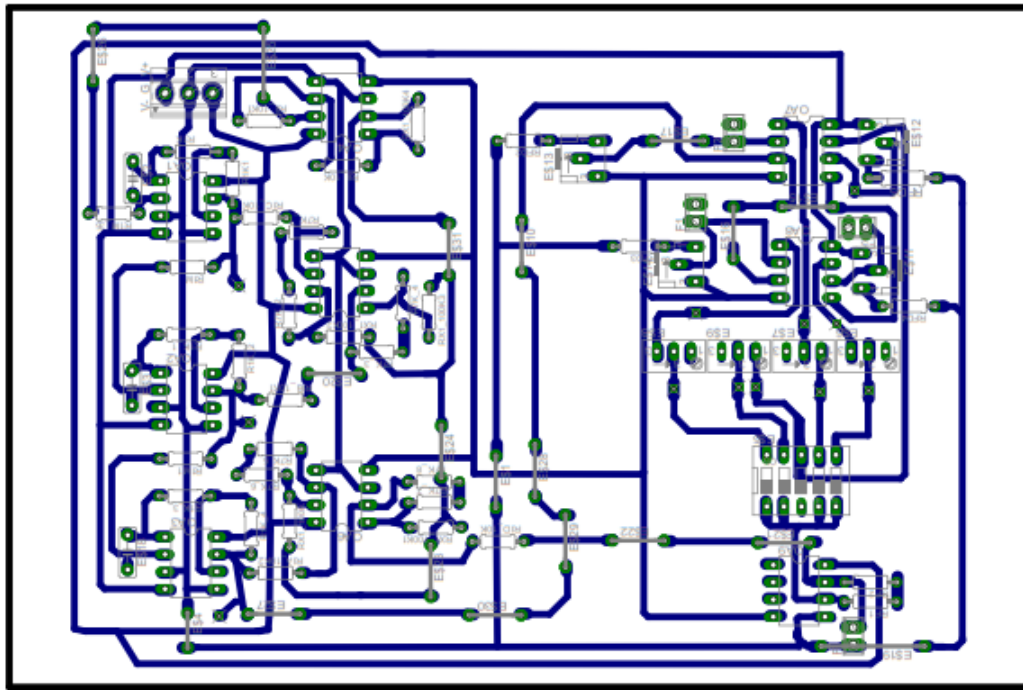


Figura 3.6: Diseño completo del circuito electrónico generador de multi-enroscados implementado en la plataforma de desarrollo Eagle.

El diseño generado para la implementación electrónica, es análogo al mostrado de forma esquemática en la Fig. 3.5, además de contener cuatro reguladores de voltaje y un interruptor de cuatro canales, dip-switch, ésto con la finalidad de poder controlar el número de enroscados a generarse dependiendo únicamente de una sola fuente de alimentación.

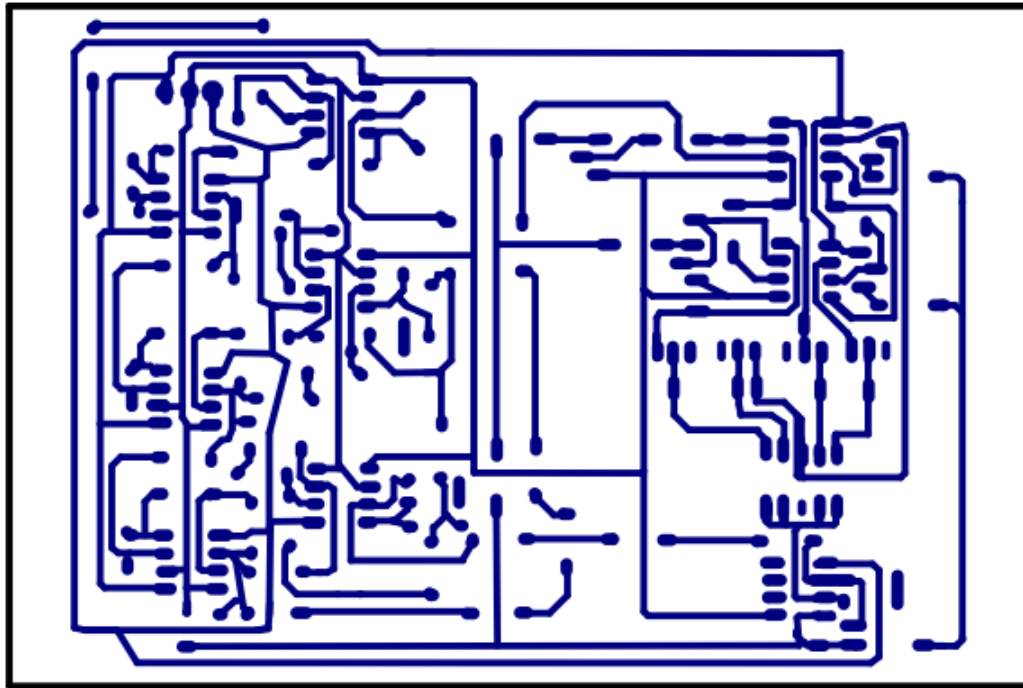


Figura 3.7: Pistas del diseño del circuito electrónico generador de multi-enroscados implementado en la plataforma de desarrollo Eagle.

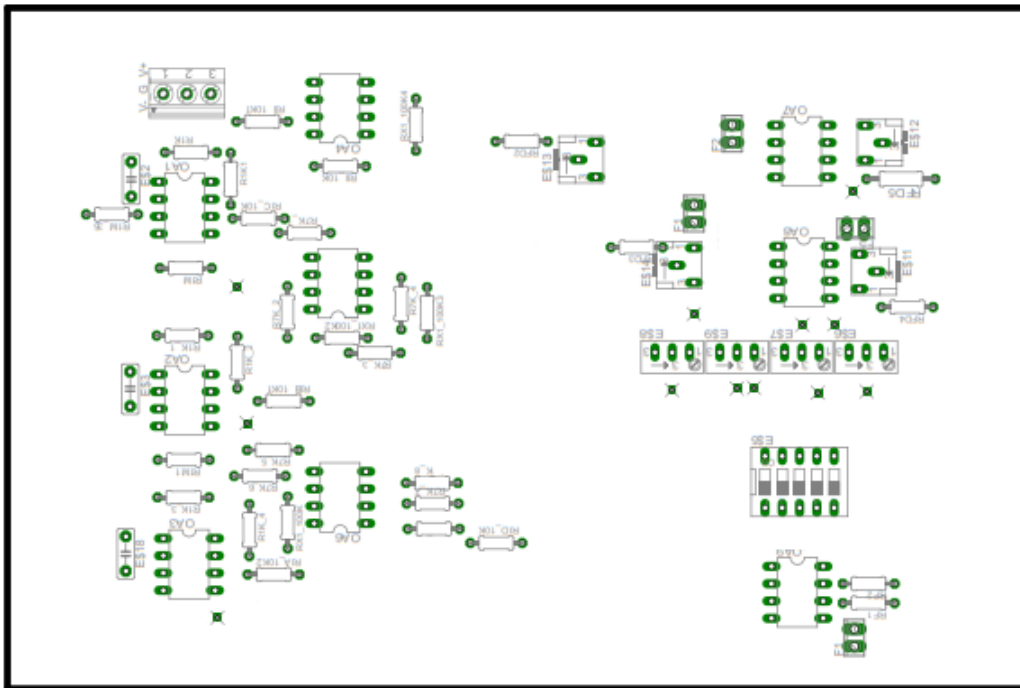


Figura 3.8: Componentes del diseño del circuito electrónico generador de multi-enroscados implementado en la plataforma de desarrollo Eagle.

3.1.3 Espacios de Fase

Para analizar la respuesta del sistema, como paso previo a la construcción del circuito electrónico, se valida el esquema del circuito mediante la plataforma de desarrollo *Multisim*, un entorno de simulación SPICE, Simulation Program with Integrated Circuits Emphasis, estándar que permite el diseño y simulación de circuitos electrónicos, en el cual se valida la respuesta del sistema descrito en la *Fig. 3.5* para, en caso de coincidir con lo reportado en [87], llevar a cabo a su implementación física.

En la siguiente figura se muestran las proyecciones en el espacio xy de la respuesta del sistema para los posibles enroscados a generar, validando la simulación en Multisim, *Fig. 3.9 a-d)*, con su correspondiente circuito físico, *Fig. 3.9 e-h)*, el cual es graficado con ayuda de *MatLab*.

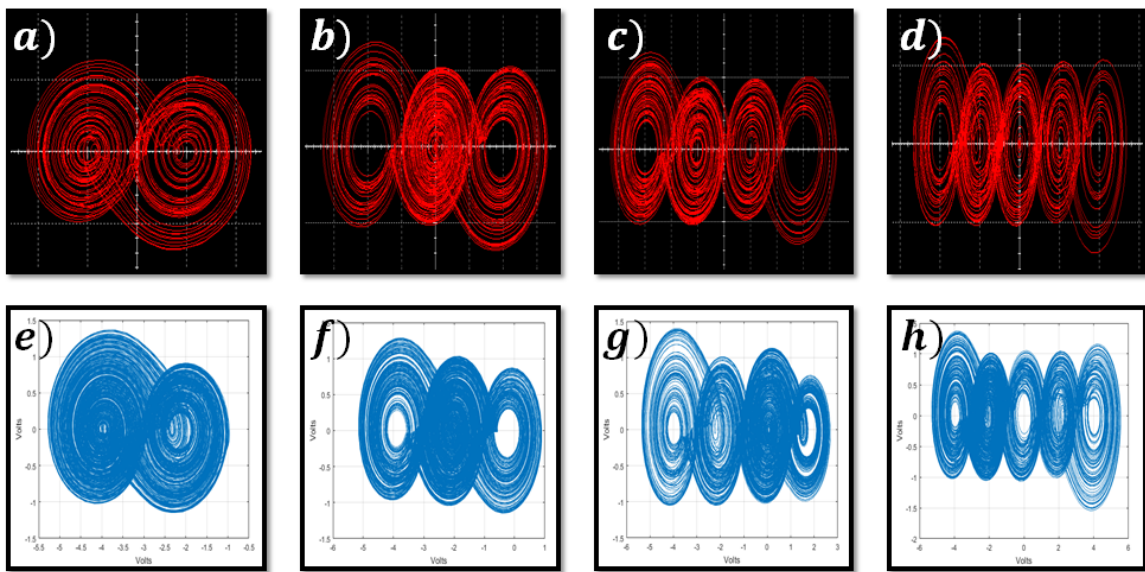


Figura 3.9: Proyecciones en el espacio xy de la respuesta del sistema simulado en Multisim a)-d), Proyecciones en el espacio xy de la respuesta del sistema físico e)-h).

Como se mencionó con anterioridad, la *SNLF* implementada es capaz de generar una dinámica de dos hasta cinco enroscados en el oscilador, misma que es validada en la figura anterior, los valores para obtener cada una de las dinámicas es descrita en la siguiente tabla, en base a la configuración mostrada en la *Fig. 3.2*.

Número de Enroscados							
Dos		Tres		Cuatro		Cinco	
Elemento	Valor	Elemento	Valor	Elemento	Valor	Elemento	Valor
V_1	$0V$	V_1	$-1V$	V_1	$0V$	V_1	$-1V$
V_2	$0V$	V_2	$1V$	V_2	$-2V$	V_2	$1V$
V_3	$0V$	V_3	$0V$	V_3	$2V$	V_3	$-3V$
V_4	$0V$	V_4	$0V$	V_4	$0V$	V_4	$3V$
R_5^*	$5.5K\Omega$	R_5^*	$5.5K\Omega$	R_5^*	$5.5K\Omega$	R_5^*	$5.5K\Omega$
R_{1-4}^*	$90K\Omega$	R_{1-4}^*	$90K\Omega$	R_{1-4}^*	$90K\Omega$	R_{1-4}^*	$90K\Omega$

Cuadro 3.2: Valores utilizados para la generación de una SNLF de dos hasta cinco multi-enroscados.

3.2 Sistema generador de movimiento Browniano

El movimiento Browniano se refiere a la dinámica aleatoria que pueden seguir los diversos elementos de un sistema en un periodo de tiempo, un ejemplo común es el movimiento errático de las partículas de pelusa, o polvo, que se aprecian cuando por la rendija de una habitación entra un haz de luz [8, 18]. Otro sistema que muestra movimiento Browniano es el exhibido por el precio de las acciones que se cotizan en las bolsas de valores, entre otros.

Durante ésta sección se analizará un modelo numérico, el cual aproxima de forma determinista la generación de movimiento Browniano, que será sometido a diversos análisis en aras de encontrar regiones de operación del sistema donde la dinámica cumpla los requisitos planteados de acuerdo a la respuesta deseada, en este caso, comportamiento de tipo Browniano.

3.2.1 Modelo Matemático

Paul Langevin postuló que una partícula inmersa en un fluido sentiría una fuerza de fricción solamente por encontrarse dentro del medio [21], y, de acuerdo a la Ley de Sto-

kes [89], una partícula de radio r , con una masa m , que se encuentra en un medio con una viscosidad η , sufrirá un cambio en su aceleración con respecto al tiempo de la forma $\dot{y} = \gamma y = \frac{6\pi r \eta}{m}$, pero, en un nivel mesoscópico, es decir, donde no se contempla la interacción atómica de las partículas si no las propiedades de la materia, a éste cambio en la aceleración se debería de añadir un término estocástico altamente fluctuante, el cual describiría las interacciones de la partícula inmersa con los átomos del medio, dando como resultado a la famosa ecuación de Langevin, $\dot{y} = -\gamma y + A_f$, la cual es, hasta la fecha, la más empleada cuando se modela al movimiento Browniano [8].

Tomando como base al modelo propuesto por Langevin, es que surge el modelo que aproxima la generación de movimiento Browniano de forma determinista, que, de acuerdo a lo reportado [35], es capaz de generar, de manera teórica, una respuesta que contiene características del movimiento Browniano clásico. El sistema propuesto toma como base de su construcción un sistema generador de multi-enroscados, mismo que se ve modificado de acuerdo a la ley de Stokes para una partícula inmersa en un fluido, es decir, contempla una partícula de radio r con masa m inmersa en un fluido de viscosidad η , lo que provee los parámetros físicos del sistema a estudiar, además, se sustituye la aceleración fluctuante de tipo estocástica por una función tipo jerk, generandose así un sistema de tres ecuaciones diferenciales acopladas.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\gamma y + z \\ \dot{z} &= -\alpha_1 x - \alpha_2 y - \alpha_3 z + \alpha_4,\end{aligned}\tag{3.9}$$

donde:

$$\alpha_4 = C_1 \left[g \left(\frac{x}{C_2} \right) \right].\tag{3.10}$$

La función $g(x)$ responde a la función de redondeo al entero más cercano a x [60]. Debido a que esta definición resulta ambigua para valores fraccionarios, se adopta la siguiente regla:

$$g = \left\{ \begin{array}{l} \text{Redondeo hacia arriba tomando } \lfloor x + 0.5 \rfloor \\ \text{Redondeo hacia abajo tomando } \lceil x - 0.5 \rceil \\ \text{Redondeo a números pares para evitar influencia estadística} \end{array} \right\}$$

El sistema descriptor que aproxima la generación de movimiento Browniano se compone de tres variables de estado, x, y, z que representan la posición, velocidad y aceleración de la partícula, respectivamente, así como sus correspondientes derivadas responden a la velocidad, aceleración y cambio en la aceleración, jerk, de la partícula, la variable γ contempla los parámetros físicos del sistema estudiado, es decir, las propiedades tanto de la partícula como del medio donde se encuentra inmersa. La función no lineal de éste sistema representa una generalización de una función lineal a trozos o de una aproximación de funciones saturadas [56, 90], donde su objetivo es idéntico al de las anteriores, generar un determinado número de mesetas sobre las cuales el sistema generará un comportamiento similar al del sistema generador de multi-enroscados, con la particularidad de que, en base a los valores de los parámetros de control, α_{1-3} , la respuesta se asemejará, cualitativamente, al movimiento Browniano. La elección de los parámetros de control debe responder, de igual forma, a un modelo cuyos valores propios del sistema lineal afín correspondan a una configuración de un sistema disipativo inestable de primer tipo.

3.2.2 Definición de parámetros para sistema UDS I

A partir del modelo descrito por la ecuación 3.9, se puede obtener el polinomio característico del sistema para poder desarrollar el análisis de los puntos fijos asociados a la matriz lineal del sistema, lo que proveerá el rango de valores donde el modelo tendrá comportamiento descrito por un sistema UDS I. Dicho polinomio característico se encuentra descrito de la forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\gamma & 1 \\ -\alpha_1 & -\alpha_1 & -\alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\gamma & 1 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right] = \mathbf{0}$$

$$\left[\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & (-\gamma - \lambda) & 1 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & (-\alpha_3 - \lambda) \end{pmatrix} \right] = \mathbf{0} \quad (3.12)$$

$$\lambda^3 + \lambda^2(\alpha_3 + \gamma) + \lambda(\gamma\alpha_3 + \alpha_2) + \alpha_1 = 0.$$

Una vez determinado el polinomio característico del modelo, es posible explorar los valores de los parámetros de control para los cuales el sistema pertenezca, por definición, a un sistema disipativo inestable de tipo *I*. Dado que el rango de valores puede ser infinito, se fija el valor de la variable $\gamma = 0.1$ y se exploran las combinaciones en base a los tres parámetros restantes, $\alpha_{1,2,3}$.

Debido a que se consideran a los tres parámetros de control como flexibles, con el fin de encontrar las regiones donde el sistema posea un comportamiento descrito por un sistema UDS *I*, se realiza un análisis mediante la modificación de uno solo de los tres parámetros del sistema, α_3 , manteniendo fijos a $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.7$, analizando así las curvas de los valores propios, *Fig. 3.10*, y el comportamiento de la sumatoria de estos, *Fig. 3.11*, para poder indentificar los tripletes de valores en los parámetros de control que poseen valores propios dentro de la definición de un sistema disipativo inestable de primer tipo.

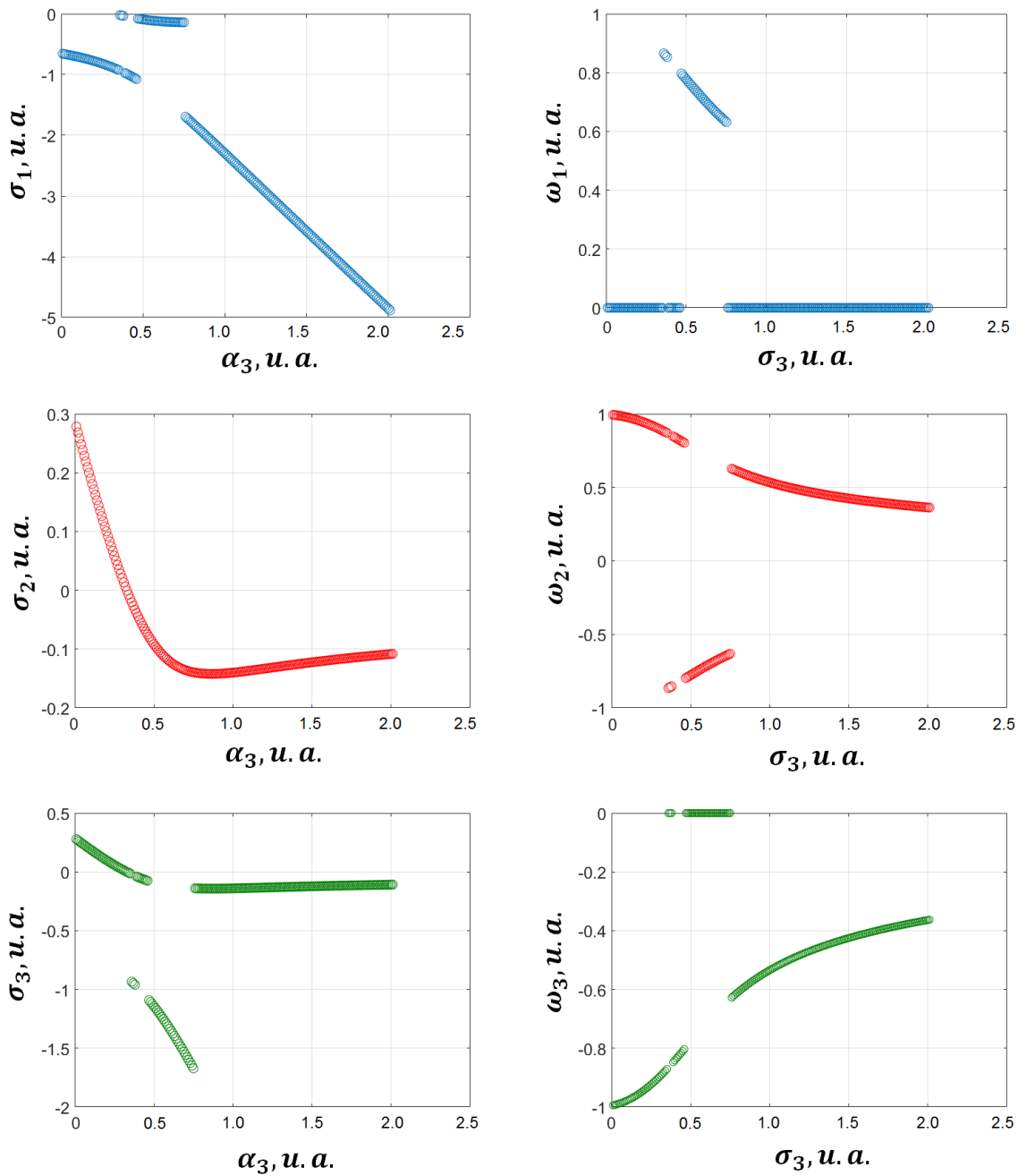


Figura 3.10: *Izquierda.* Comportamiento de la parte real de los valores propios del sistema. *Derecha.* Comportamiento de la componente imaginaria de los valores propios del sistema para los parámetros $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.7$, $\alpha_3 = [0, 2.5]$.

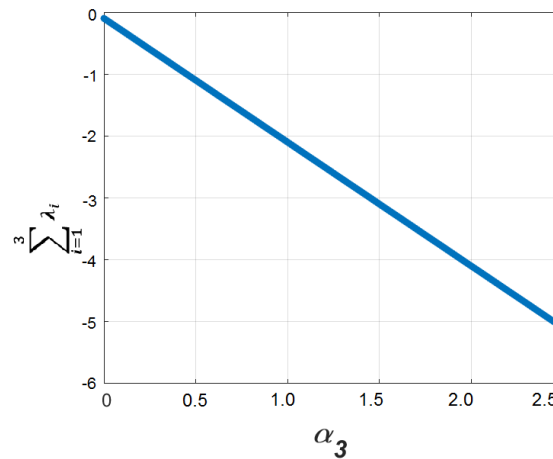
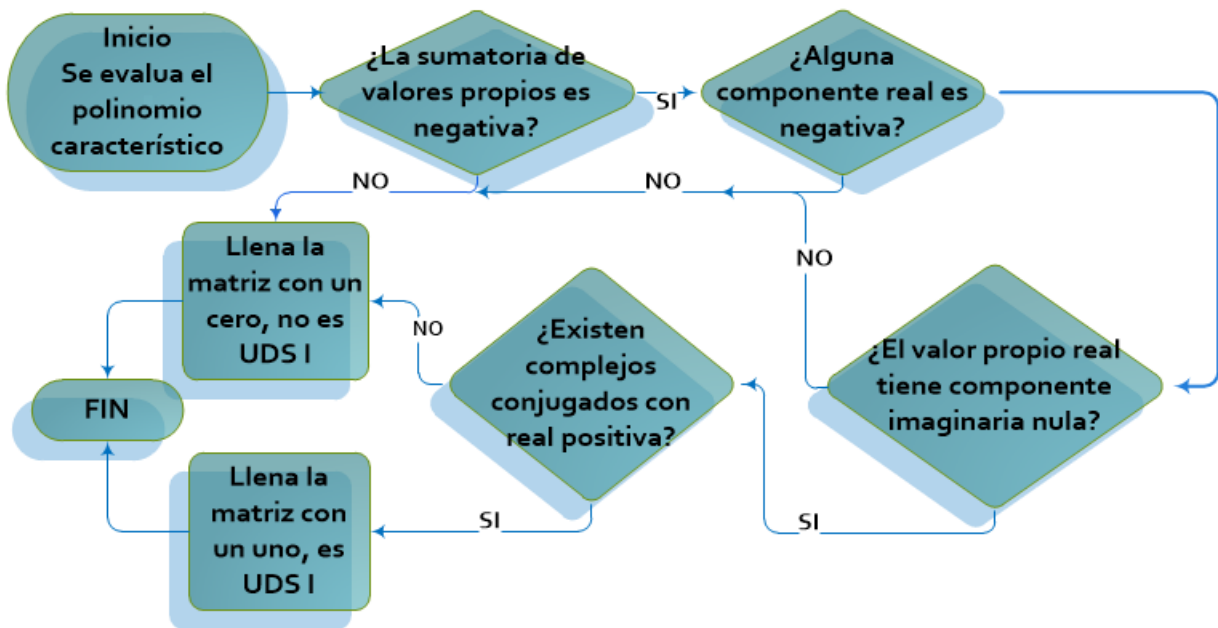
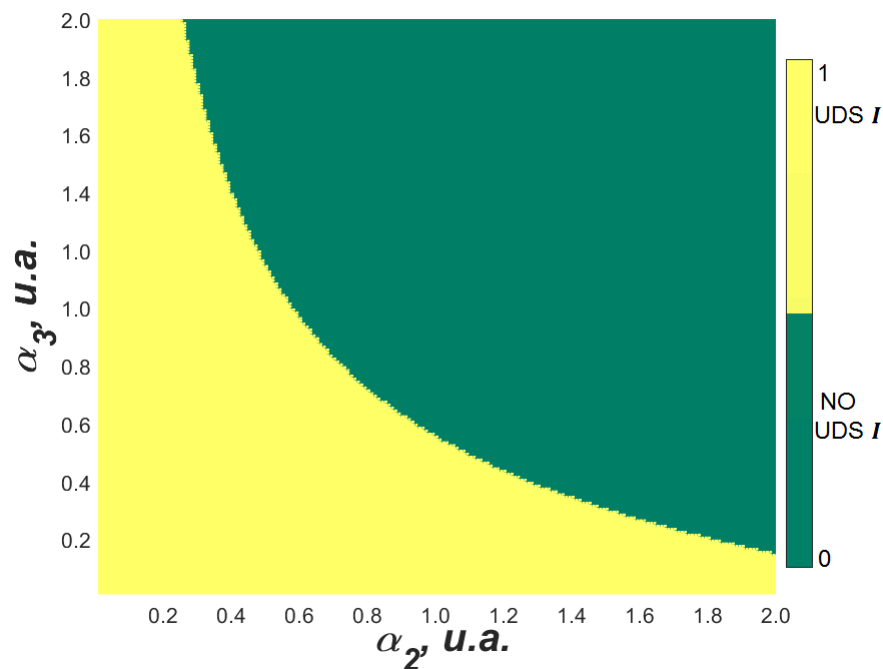


Figura 3.11: Comportamiento de la sumatoria de los valores propios del sistema para los parámetros $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.7$, $\alpha_3 = [0, 2.5]$.

El determinar el rango de valores en los cuales el sistema responde a un sistema UDS I en base a las curvas de valores propios resulta difícil de apreciarse, *Fig. 3.10*, *Fig. 3.11*, ya que se concibe a los tres parámetros de control con la libertad de ser modificados, y así poder caracterizar las posibles combinaciones donde la dinámica obtenida responda con lo esperado. En vista de la necesidad de una mejor visualización de los resultados, para determinar los rangos de valores válidos para el sistema, se construye un discretizador de puntos fijos en base a la definición de un sistema UDS I . Para cada triplete de valores en los parámetros de control, corresponde un triplete de valores propios que son analizados de acuerdo a lo mostrado en el diagrama de flujo de la *Fig. 3.12*.

Como resultado del discretizador, implementado en el software de programación *MatLab*, se obtiene el gráfico siguiente, *Fig. 3.13*, donde se varían dos de los tres parámetros de control en un espacio simétrico definido por $\alpha_1 = 0.7$, $\alpha_2 = \alpha_3 = [0, 2]$. Todo punto de color amarillo corresponde a un triplete de valores donde el sistema posee dinámica definida por un sistema UDS I , de forma contraria a todo punto verde del mapa, donde, sin importar que tipo de configuración en sus puntos fijos posea, ésta es diferente a la de un sistema disipativo inestable de primer tipo. El comportamiento global del sistema, es decir, mediante la modificación de los tres parámetros de control, α_1 , α_2 , α_3 , se aprecia en la *Fig. 3.14*, donde todo punto de color contenido en el volumen, corresponde a un triplete de valores en los parámetros de control que poseen puntos fijos descritos por un sistema UDS I .


 Figura 3.12: Diagrama de flujo del discretizador de dinámica UDS I .

 Figura 3.13: Mapa de comportamiento del tipo UDS I en base a la modificación de dos parámetros del sistema, $\alpha_1 = 0.7$, $\alpha_2 = \alpha_3 = [0, 2]$, $\gamma = 0.1$. El color amarillo responde a una configuración de valores propios del tipo UDS I

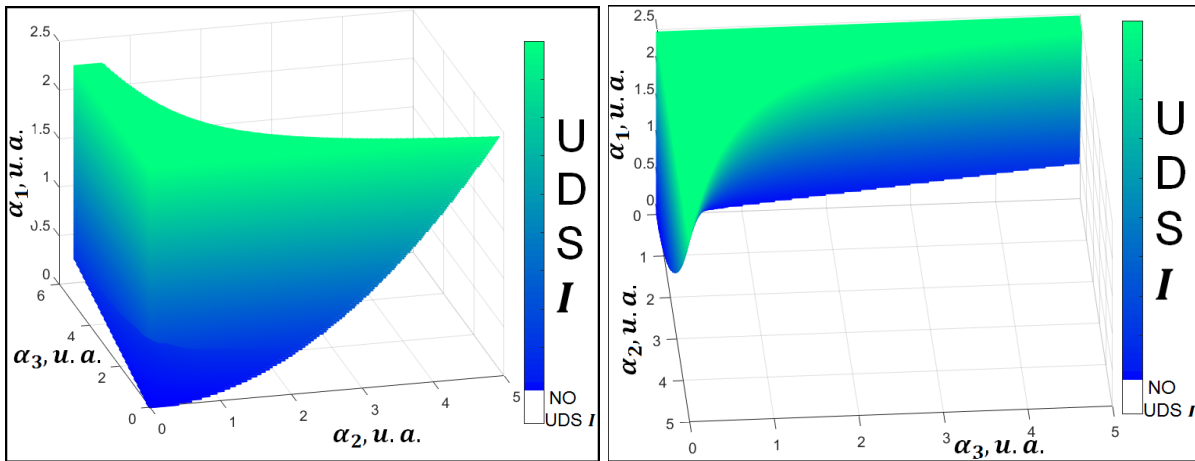


Figura 3.14: Volúmen de comportamiento del sistema generador de movimiento Browniano bajo el régimen de un sistema UDS I . Todo punto de color contenido en el volúmen responde a una configuración, en puntos fijos, del sistema bajo el regimen UDS I .

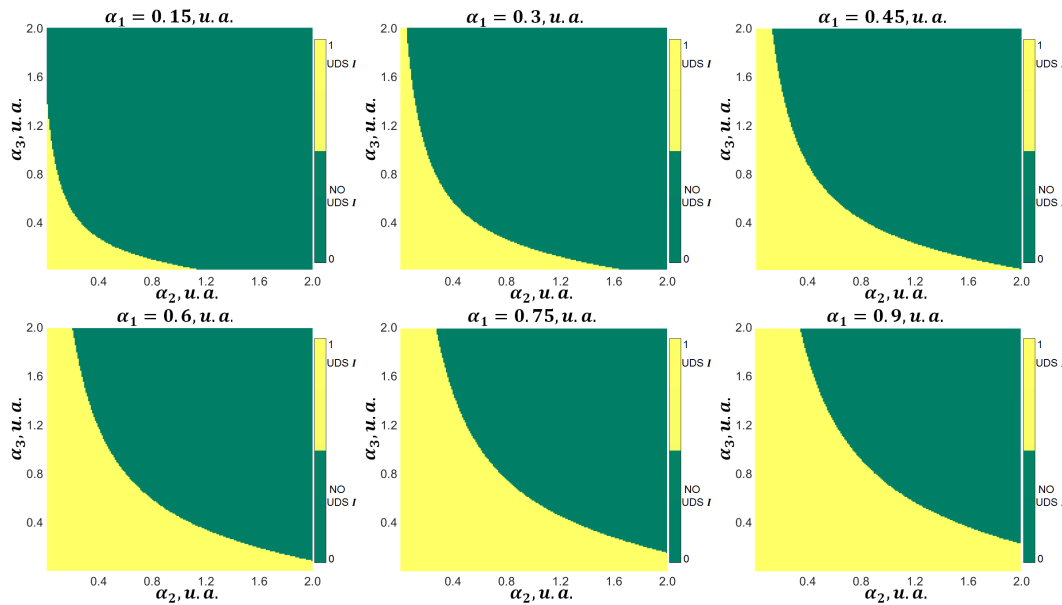


Figura 3.15: Comportamiento del volumen del sistema bajo el regimen de un sistema UDS I , *Fig. 3.14*, seccionado para distintos valores de α_1 .

El comportamiento del volumen que describe todas las combinaciones de valores, en los parámetros de control del sistema, que poseen valores propios que describen a un sistema disipativo e inestable de tipo uno, *Fig. 3.14*, se puede ver como la evolución, y superposición de mapas, del área que se genera mediante la modificación de dos de los tres parámetros de control, *Fig. 3.15*, la cual corresponde a un triplete de α' s cuyos

valores propios responden a una configuración de un sistema UDS de tipo uno.

3.2.3 Implementación electrónica y ecuaciones equivalentes

Como resultado del análisis del volúmen que describe el comportamiento del modelo generador de movimiento Browniano bajo el régimen de un sistema tipo UDS I , se determinan los rangos de valores sobre los cuales se explorará, y caracterizará, la dinámica del sistema electrónico a implementar, dichos rangos se encuentran comprendidos de la siguiente forma:

$$\alpha_1 = [0.7, 1.5]$$

$$\alpha_2 = [0.7, 1.7]$$

$$\alpha_3 = [0.1, 1.5]$$

De forma análoga a lo mostrado en la sección anterior, se toma como base el modelo descriptor para la generación de movimiento Browniano de forma determinísta, *ecuación 3.9*, el cual, si es integrado en ambos lados de la igualdad, resulta en el sistema descrito por la *ecuación 3.13*.

$$\begin{aligned} x &= \int (y) dt \\ y &= \int (-\gamma y + z) dt \\ z &= \int (-\alpha_1 x - \alpha_2 y - \alpha_3 z + \alpha_4) dt. \end{aligned} \tag{3.13}$$

El sistema de ecuaciones integradas, *ecuación 4.13*, puede ser fácilmente representado en un diagrama de bloques, que brinda una idea general de la estructura del sistema electrónico deseado. Dicho diagrama se encuentra conformado por un integrador por variable de estado, dos puntos suma para dar forma a la segunda y tercera ecuación del sistema, respectivamente, así como la función de saturación, α_4 , el esquema descrito se muestra en la *Fig. 3.16*.

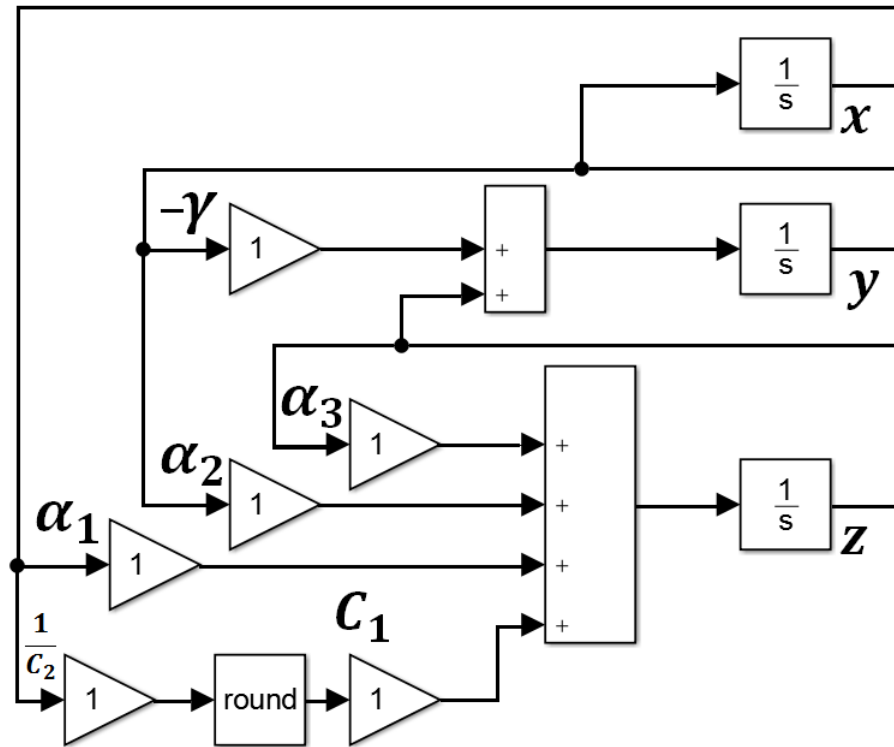


Figura 3.16: Diagrama a bloques del sistema generador de movimiento Browniano.

Tomando en cuenta el diagrama a bloques del sistema de ecuaciones integradas, *ecuación 3.13*, es posible implementar el modelo de forma electrónica, *Fig. 3.17*, haciendo uso de amplificadores operacionales bajo la configuración de un integrador, *ecuación A.17*, *Fig. A.8*, además de sumadores, *ecuación A.9*, *Fig. A.6*, para generar las entradas necesarias de la segunda y tercera variable del sistema, inversores de voltaje de ganancia unitaria, *ecuación A.4*, *Fig. A.4*, para poder compensar los cambios de signo que generen los circuitos integradores, así como la entrada de la función de saturación al sistema, misma que será implementada en una aplicación de tiempo real en la tarjeta de adquisición de datos *dSPACE1104*.

La primera ecuación del sistema de la *Fig. 3.17*, χ_1 , recuadro azul, es implementada mediante la utilización de un amplificador operacional bajo la configuración de integrador, el cual se conecta a un inversor de ganancia unitaria para compensar el cambio de signo generador por el circuito integrador.

La segunda ecuación del sistema, recuadro naranja, se compone por un amplificador inversor de ganancia variable, con él se escala la variable y en un factor dado por γ , un

punto suma de ganancia unitaria y un integrador, lo que completa la segunda variable del sistema, χ_2 .

La tercera ecuación del circuito electrónico mostrado en la *Fig. 3.17*, χ_3 , recuadro verde, se conforma por un sumador de cuatro entradas con ganancia unitaria, que se ve alimentado por las tres variables del sistema escaladas por un amplificador inversor de ganancia variable, que generan los valores de los parámetros de control, y un amplificador integrador, lo que completa la tercera ecuación del modelo.

El sistema de ecuaciones integradas, *ecuación 3.13*, representadas por sus componentes electrónicos, se pueden expresar como las mostradas en la *ecuación 3.14*, el cual, de acuerdo al análisis de nodos realizado al circuito electrónico con base a la ley de corrientes de Kirchhoff, funciona de forma análoga, donde los valores de los parámetros de control del sistema se ven reflejados por la relación entre las resistencias que componen al circuito electrónico descrito en la *Fig. 3.17*.

$$\begin{aligned}\chi_1 &= \frac{1}{R_1 C_1} \int \left(\frac{R_3}{R_2} \chi_2 \right) dt = x \\ \chi_2 &= \frac{R_8}{R_9 C_2} \int \left(\frac{1}{R_7} \chi_3 - \frac{R_5}{R_4 R_6} \chi_2 \right) dt = y \\ \chi_3 &= \frac{R_{20}}{R_{21} C_3} \int \left(-\frac{R_{11}}{R_{10} R_{17}} \chi_1 - \frac{R_{13}}{R_{12} R_{18}} \chi_2 - \frac{R_{15}}{R_{14} R_{19}} \chi_3 + \frac{1}{R_{16}} \alpha_4 \right) dt = z.\end{aligned}\tag{3.14}$$

Donde los factores de escalamiento propios de los parámetros de control, α_1 , α_2 , α_3 , γ , se encuentran definidos por las relaciones de las resistencias siguientes:

$$\frac{R_{11}}{R_{10}} = \alpha_1; \quad \frac{R_{13}}{R_{12}} = \alpha_2; \quad \frac{R_{15}}{R_{14}} = \alpha_3; \quad \frac{R_5}{R_4} = \gamma.\tag{3.15}$$

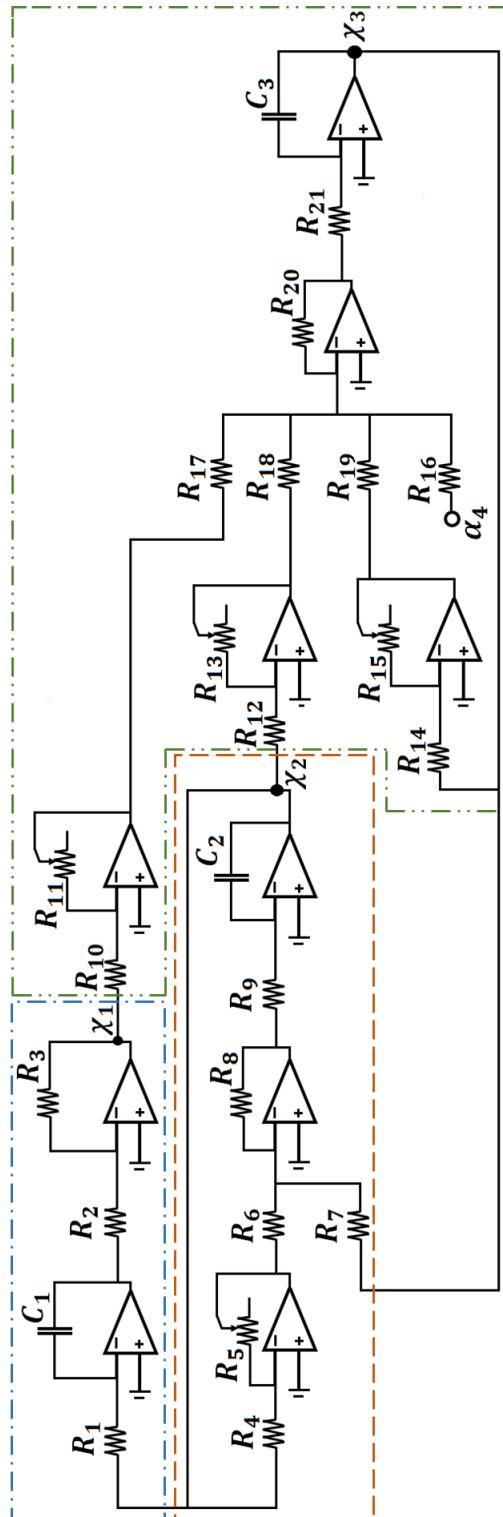


Figura 3.17: Esquema del circuito implementado para el modelo generador de movimiento Browniano. La variable de estado x se encuentra encerrada en un recuadro de color azul, de igual forma la variable y del sistema se encierra en un recuadro naranja, así como la variable z en color verde.

Los valores de los elementos utilizados para la implementación electrónica se describen a continuación, *Cuadro 3.3, 3.4*.

Elementos electrónicos del circuito de la <i>Fig. 3.18</i>		
Elemento	Valor	Tolerancia
R_1, R_9, R_{21}	$1M\Omega$	10 %
R_{10}, R_{12}, R_{14}	$10K\Omega$	5 %
C_1, C_2, C_3	$100pF$	10 %
$R_5, R_{11}, R_{13}, R_{15}$	$[1 - 100]K\Omega$	20 %

Cuadro 3.3: (1) Valores utilizados en la implementación electrónica del modelo generador de movimiento Browniano.

Elementos electrónicos del circuito de la <i>Fig. 3.18</i>		
Elemento	Valor	Tolerancia
R_4	$100K\Omega$	10 %
R_5, R_{11}	$[1 - 100]K\Omega$	20 %
R_2, R_3, R_6, R_7	$1K\Omega$	5 %
$R_8, R_{16}, R_{17}, R_{18}, R_{19}, R_{20}$	$1K\Omega$	5 %

Cuadro 3.4: (2) Valores utilizados en la implementación electrónica del modelo generador de movimiento Browniano.

La frecuencia de oscilación del circuito se encuentra dada por el factor de integración, el cual corresponde a la relación definida por $\frac{1}{R_1 C_1} = \frac{1}{R_9 C_2} = \frac{1}{R_{21} C_3} = 10kHz$.

La implementación física del sistema se ejecuta en la plataforma de desarrollo *Eagle*, para despues ser elaborado con ayuda de una máquina CNC, control numérico computarizado, con la que se elabora el PCB final. En la *Fig. 3.18-3.19* se muestra el esquema generado en *Eagle* del circuito para su implementación física.

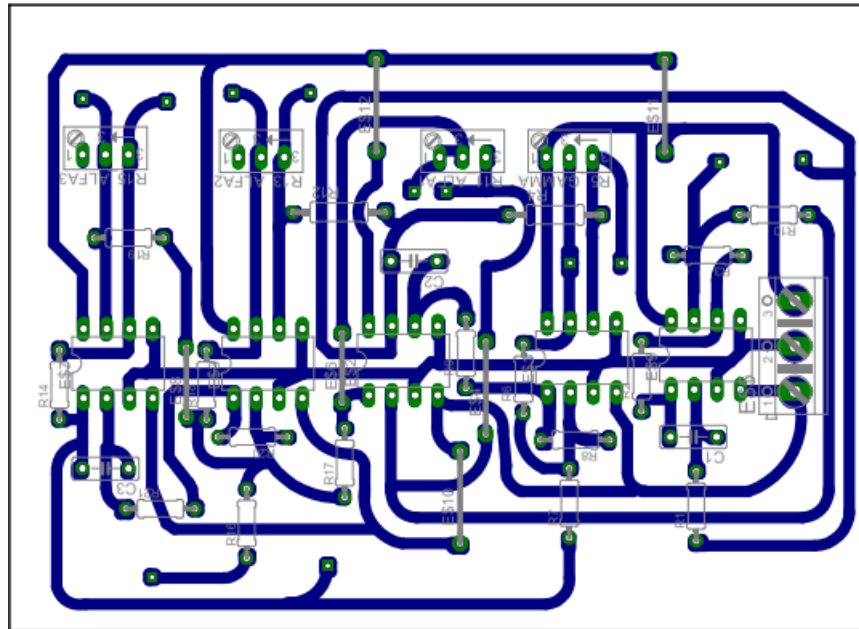


Figura 3.18: Modelo del circuito electrónico generador de movimiento Browniano, implementado en la plataforma de desarrollo Eagle.

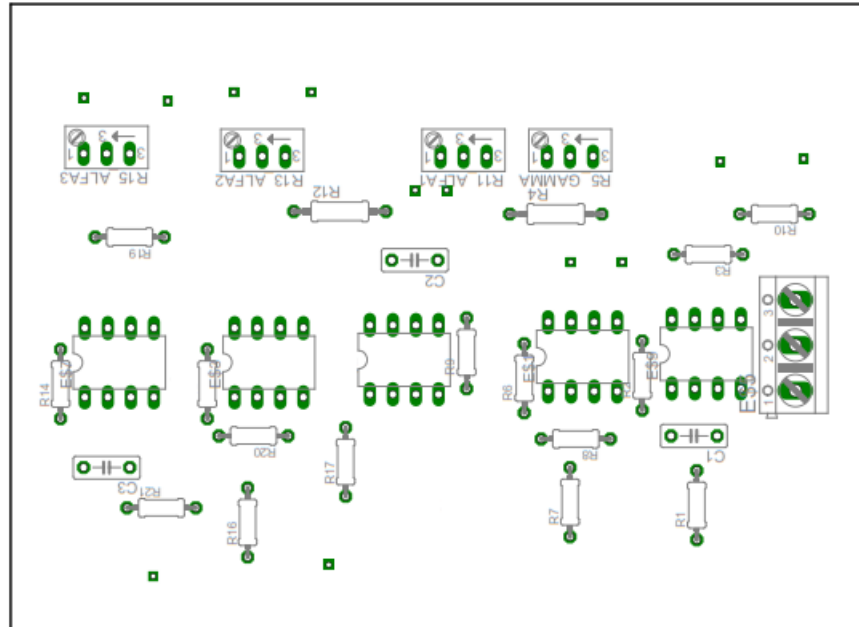


Figura 3.19: Componentes del diseño del circuito electrónico generador de movimiento Browniano, implementado en la plataforma de desarrollo Eagle.

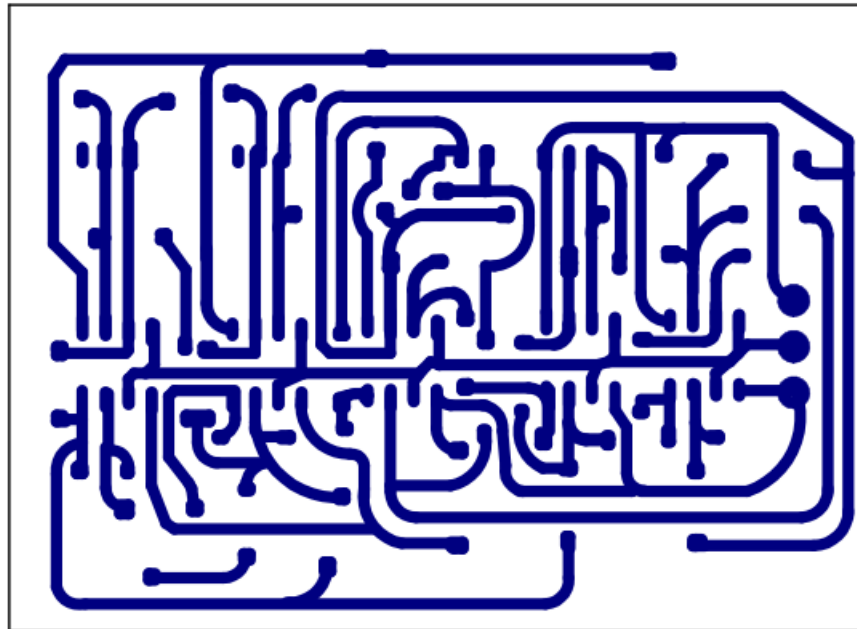


Figura 3.20: Pistas del diseño del circuito electrónico generador de movimiento Browniano, implementado en la plataforma de desarrollo Eagle.

3.3 Interfaces virtuales

La instrumentación virtual es un concepto introducido por la compañía *National Instruments* (NI), como respuesta a la inquietud de poder utilizar una computadora personal para desarrollar mediciones como lo haría cualquier otro instrumento del laboratorio [62–64], la cual, se ejecuta desde un ordenador con funciones definidas desde su programación. Al software responsable de ésta idea se le dió el nombre de *Laboratory Virtual Instrument Engineering Workbench*, *LabVIEW*. Por lo anterior, se define la instrumentación virtual como un sistema de mediciones, análisis y control de señales físicas a través de un computador mediante la generación y aplicación de instrumentos o interfaces virtuales.

La programación de instrumentos virtuales, generalmente, se diseña de tal forma para que el sistema realice mediciones de forma constante durante un cierto periodo de tiempo o en base a la modificación de parámetros para el estudio de dinámica del sistema automatizado, ésta arquitectura puede ser representada, e implementada, en base a máquinas de estados. Una máquina de estados es un modelo de comportamiento de sistemas basado en entradas y salidas, donde las salidas dependen no sólo de las señales de entrada actuales,

si no que también son considerados los estados anteriores del sistema. Una máquina de estados se denomina de tipo finita si el conjunto de posibles condiciones posee un límite, delimitando a éstos el inicio y fin del proceso.

Tomando como base el sistema generador de multi-enroscados, se diseña un instrumento virtual capaz de reproducir el comportamiento de la función de saturación de cinco niveles, ésto para estudiar la respuesta del sistema bajo la modificación del parámetro de control, denominado G_1 , lo que permitirá obtener una mayor cantidad de información sobre el comportamiento del oscilador, dando paso a la posibilidad de caracterizar su dinámica en base al parámetro de control estudiado. El circuito implementado para éste propósito, denominado de ahora en adelante como híbrido, opera de la siguiente manera: Mediante amplificadores operacionales se conservan las ecuaciones del sistema, con la excepción de la función de saturación, la cual incluía tanto los reguladores de voltaje y el punto suma controlado por el interruptor de cuatro canales, todo ésto es implementado en una aplicación en tiempo real desarrollada en el software de programación Simulink, para después ser embebida en la tarjeta de adquisición de datos *dSPACE1104*. Esta plataforma de desarrollo y control proporciona librerías para poder establecer comunicación con un entorno híbrido de MatLab-Simulink, con lo que es posible incluir bloques de entrada y salida al sistema implementado, permitiendo obtener señales desde el sistema real, procesarlas y enviarlas de vuelta al sistema por medio de canales físicos. La tarjeta posee un procesador de punto flotante de 64 bits con una frecuencia de 250MHz, ocho canales analógico-digital y ocho canales digital-analógico. El esquema del circuito implementado se observa en la Fig. 3.21.

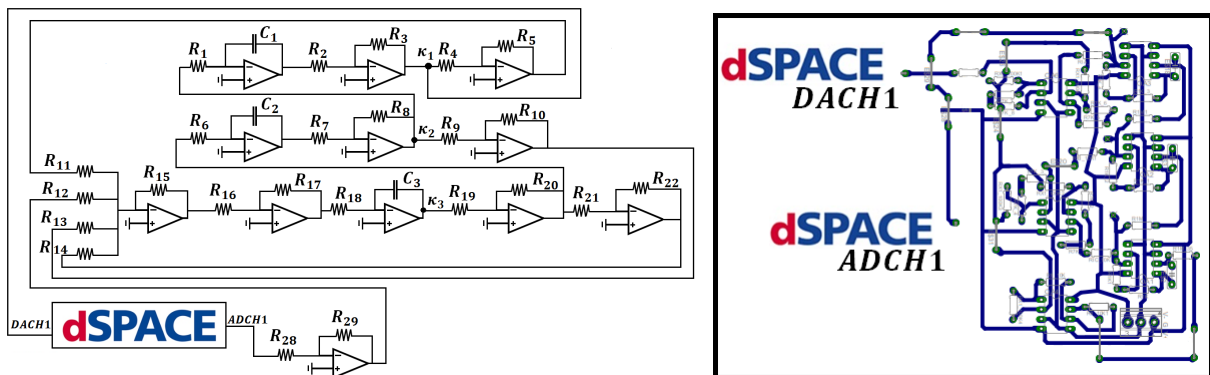


Figura 3.21: *Izquierda.* Esquema del circuito electrónico híbrido. *Derecha.* Diseño en Eagle del circuito híbrido.

El arreglo mostrado en la *Fig. 3.21* opera en base a las entradas y salidas analógicas de la tarjeta de adquisición de datos, donde a partir del canal ADC, convertidor analógico-digital, ingresa la variable x del sistema, en la que se basa la función de saturación para generar los niveles saturados, una vez en la tarjeta, en base a lo programado en Simulink, se realiza la segmentación de la función en base al funcionamiento de la *SNLF* en la configuración para la generación de cinco mesetas, contemplando la ganancia G_1 , una vez generada la señal, ésta es devuelta al sistema por medio del canal DAC, convertidor digital-analógico, para completar el sistema y que éste pueda oscilar. Como punto de validación se hace una comparativa entre la función implementada de forma electrónica contra la función implementada en la tarjeta de adquisición de datos, *Fig. 3.22*, generándose una correlación satisfactoria, indicando una correcta generación y posible sustitución de la misma.

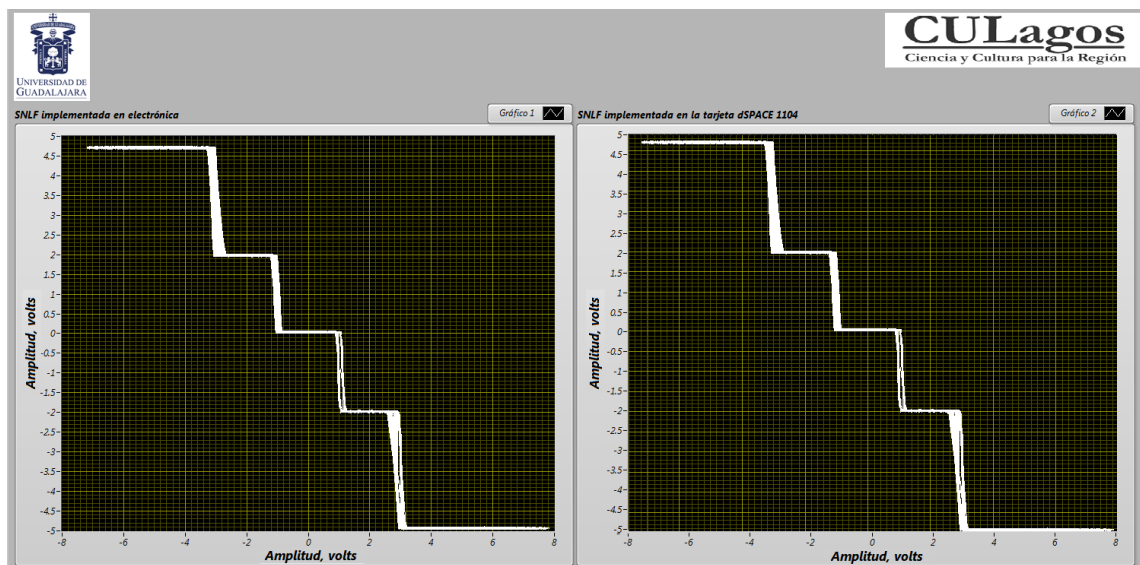


Figura 3.22: Izquierda. *SNLF* implementada mediante amplificadores operacionales. Derecha. *SNLF* implementada en la tarjeta de adquisición de datos dSPACE 1104.

Una vez validada la implementación de la *SNLF* en la tarjeta dSPACE 1104, se procede a la captura de resultados *Fig. 3.23*, los cuales poseen una gran similitud con los mostrados en la *Fig. 3.9*, comprobando que la utilización de la tarjeta es válida en la generación de funciones de saturación como medio para la generación de multi-enroscados.

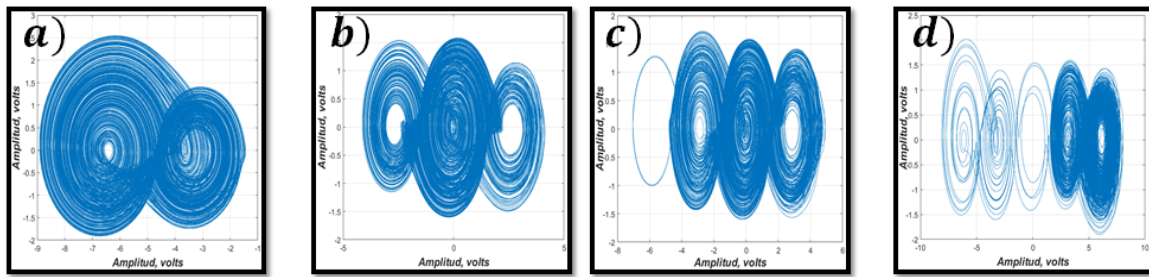


Figura 3.23: Proyecciones de la respuesta del circuito híbrido en el espacio xy con dos, tres, cuatro y cinco enroscados.

Basado en los objetivos planteados, se diseña el instrumento virtual capaz de realizar la caracterización de los sistemas electrónicos en base a la modificación de un parámetro de control, tanto para el sistema generador de multi-enroscados como para el sistema generador de movimiento Browniano, generandose así la máquina de estados correspondiente, *Fig. 3.24*, la cual, inicia con la generación de una carpeta, donde se almacenarán las series temporales obtenidas del circuito, para así comenzar el proceso de caracterización, donde se inyecta la función no lineal con el primer valor asociado al parámetro de control, en base a éste valor se hace una exploración de veinte cambios en las condiciones iniciales, cci's.

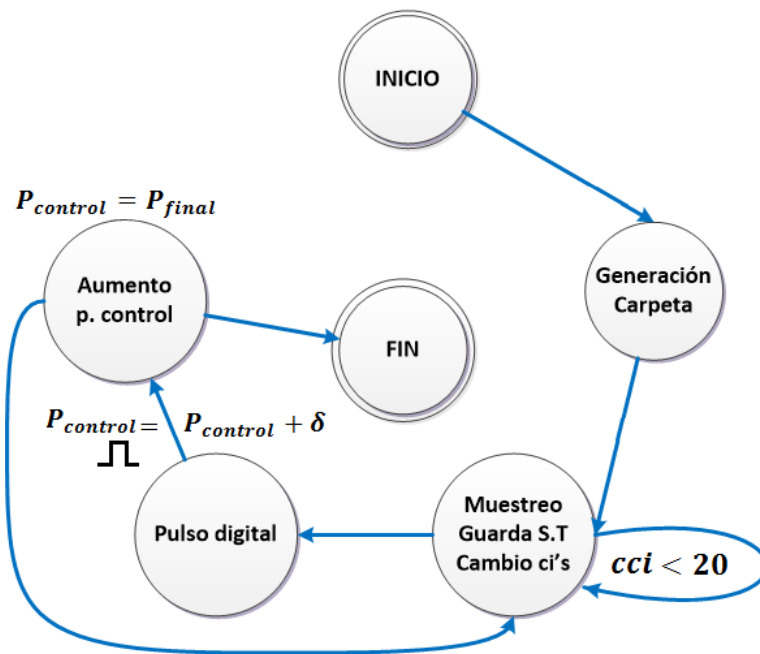


Figura 3.24: Máquina de estado diseñada para la caracterización de sistemas electrónicos.

La modificación en las condiciones iniciales del sistema se debe a su dinámica no lineal, con lo que, por definición, lo vuelve un sistema altamente sensible a cualquier modificación en éstas. Una vez que se cumple el número definido de cci's, se envía un pulso digital, el cual incrementa el valor del parametro de control, haciendo que el sistema vuelva a explorar el número de cci's, generándo así un ciclo, el cual termina cuando el parámetro de control tiene un valor igual al máximo con el cual se desea explorar al sistema.

Haciendo uso de la plataforma de desarrollo LabVIEW se generan los instrumentos virtuales necesarios, basados en la máquina de estados que los describe, para controlar equipo de laboratorio y poder desarrollar la caracterización en la dinámica del circuito mediante su implementación física. Los equipos involucrados en la automatización son un módulo de relevadores, con el que se realiza el cambio en las condiciones iniciales, una tarjeta de adquisición de datos *NI USB 6353*, con la que se realiza la captura de señales generadas por el circuito, control de pulsos digitales para el cambio de condiciones iniciales así como el control en el aumento del parámetro de control, y la tarjeta de adquisición de datos *dSPACE 1104*, donde la función no lineal es implementada. El sistema experimental se muestra en la *Fig. 3.25*.

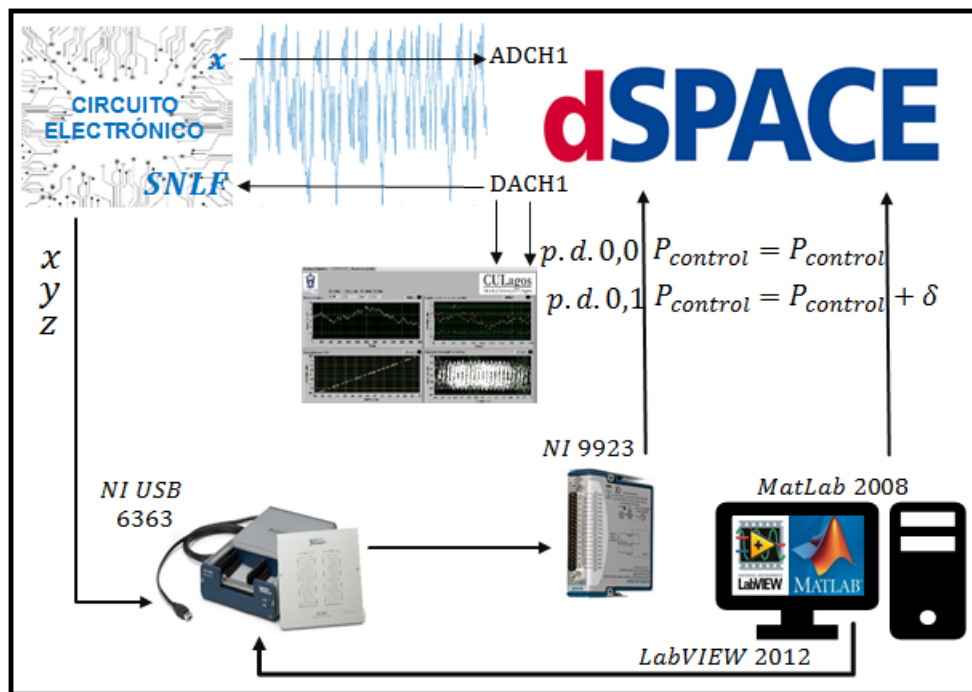


Figura 3.25: Esquema de la preparación experimental.

Como resultado final del instrumento virtual implementado en la plataforma de LabVIEW, se obtiene una interfaz virtual con panel de control de acceso al usuario seccionado en tres pestañas, mismas que permiten controlar la adquisición de datos y visualización en tiempo real de la respuesta del sistema, en las Fig. 4.21-4.23 se observan las diferentes vistas del panel frontal.

La primer pestaña del panel de control, Fig. 3.26, permite el control del experimento, fijando los valores del parámetro de control a explorar, $P. Inicial$, $P. Final$, el tamaño del incremento sobre el cual se explorará el parámetro de control, $Delta$, el número de condiciones iniciales a explorar, CCI . También se encuentran un par de controles con los que se determinan las carpetas donde se almacenarán los resultados y nombre de los archivos, tanto del diagrama de bifurcación de máximos locales como de las series temporales, en caso de seleccionar esto mediante la activación del botón correspondiente, *Guardar Series Temporales*. El panel frontal también contiene un breve manual de operación para el fácil manejo del experimento.

Parámetros del Experimento | **Captura de Señales** | **Procesamiento de Señales**

CULagos
Ciencia y Cultura para la Región

Captura y Guardado de Archivos

Diagrama de Bifurcación
Carpeta para almacenar D. de B.

Nombre del Diagrama de Bifurcación

Series Temporales
Carpeta para Almacenar Series Temporales

Nombre de la Serie Temporal

Parámetros de Experimento

CCI's **Delta** **C2**

P. Inicial **P. Final** **P. Actual**

Guardar Series Temporales

Instrucciones de Operación

- Ingresar los parámetros para el funcionamiento del Experimento
 - Carpeta para Almacenar Archivos: Ingresar la URL de la carpeta donde almacenar los archivos, series temporales y Diagrama de Bifurcación.
 - Nombre del Diagrama de Bifurcación: Ingresar el nombre con el cual se desea almacenar el archivo que contendrá al Diagrama de Bifurcación.
 - CCI's: Este parámetro responde al número de condiciones iniciales que se desea explorar. Si el número es cero, el experimento no responderá.
 - Delta: Este parámetro responde al tamaño de paso con el cual se estudia el parámetro de control con el cual se evalúa la dinámica del sistema.
 - C2: Valor de la variable C2 con el cual se está evaluando el experimento.
 - P. inicial: Valor desde el cual se realiza el barrido de valores del parámetro de control.
 - P. final: Último valor que se explorará en el barrido de valores.
 - P. actual: Valor actual sobre el cual se está evaluando la dinámica del sistema.
- Una vez ingresados todos los parámetros del sistema, presionar el botón que contiene una flecha apuntando a la derecha, ubicado en la barra de herramientas, lo que dará inicio al experimento.
- Durante el proceso de ejecución, el usuario puede navegar entre las páginas de Captura de Señales, la cual contiene cuatro gráficos que muestran la dinámica actual del sistema, y la página de Procesamiento de Señales, en la cual se ubican los gráficos correspondientes a la construcción del diagrama de bifurcación.
- Cuando el experimento concluya, apagar la fuente de voltaje simétrica.

Figura 3.26: Vista de la segunda pestaña de la interfaz virtual generada, panel de control del instrumento.

En la segunda sección del instrumento generado, Fig. 3.27, se observan cuatro gráficos, los cuales muestran el comportamiento del sistema. El *Gráfico 1* muestra la respuesta de la variable x del sistema estudiado. En el *Gráfico 2* se presentan dos variables de estado,

x , y y el comportamiento temporal de la función no lineal, en el *Gráfico 3* se muestra la proyección de la variable x del sistema contra la función no lineal, y en el *Gráfico 4* se aprecia el espacio de fase, xy , del modelo analizado.

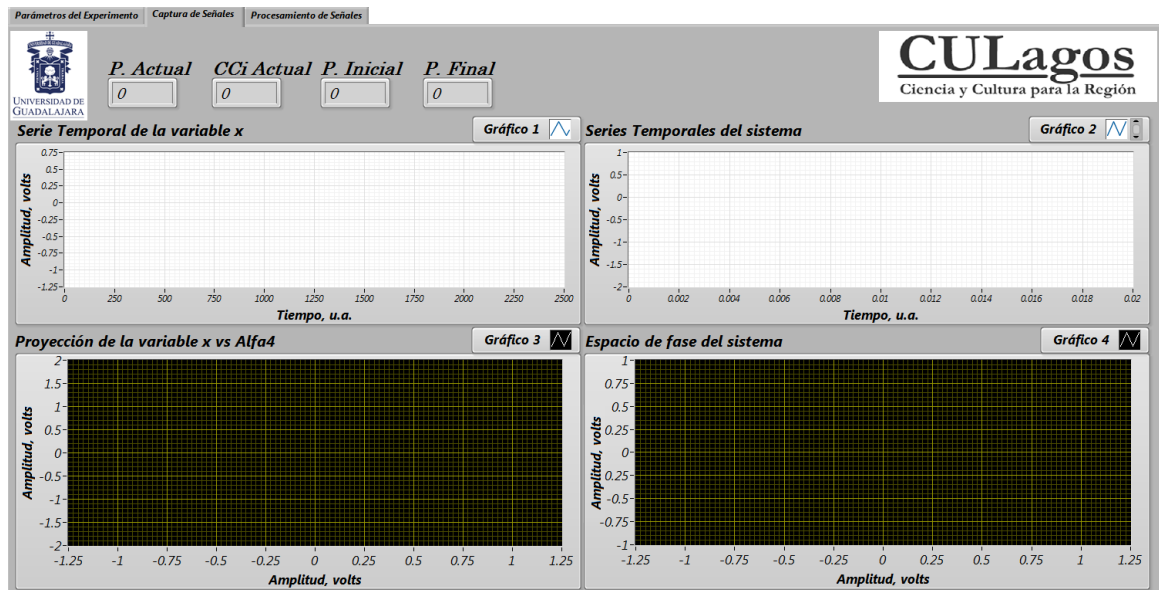


Figura 3.27: Vista de la segunda pestaña de la interfaz virtual generada, visualización de series temporales.

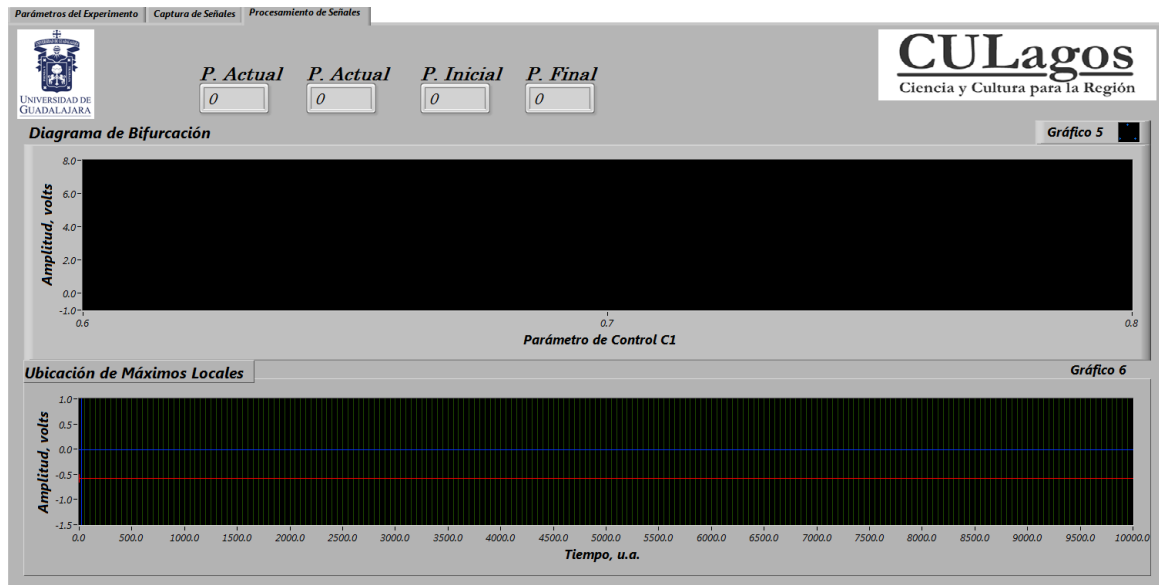


Figura 3.28: Vista de la tercera pestaña de la interfaz virtual generada, generación de diagrama de bifurcación de máximos locales.

Por último, la tercera ventana del panel frontal, *Fig. 3.28*, muestra el diagrama de bifurcación de máximos locales en el *Gráfico 5*, mientras que, en el *Gráfico 6* se aprecia la sección de la serie temporal sobre la cual se construye el diagrama de bifurcación. Cada una de las ventanas de visualización contiene indicadores que muestran el estado actual del sistema con respecto a los parámetros de exploración.

4

Resultados

Através de los años han sido desarrolladas diversas técnicas e indicadores destinados a caracterizar sistemas dinámicos. Dicha caracterización puede ser conseguida mediante el estudio de las series temporales que conforman la dinámica del sistema, obteniendo así información substancial acerca del comportamiento del modelo a lo largo del tiempo. Para el análisis de las series temporales se usan métodos que ayudan a interpretarlas y que permiten extraer información representativa sobre las relaciones subyacentes entre los datos de la serie, o colección de series, que permiten, en diferente medida, extrapolar los datos y así predecir el comportamiento de la serie en momentos no observados, sean en el futuro; extrapolación pronosticada, en el pasado; extrapolación retrógrada, o en momentos intermedios; interpolación. Ejemplos de estos métodos resultan en los estudios de la entropía de Kolmogorov [91], las distintas definiciones de dimensión, como la dimensión fractal [92], o la dimensión de Hausdorff [93], entre otros. Debido a la naturaleza de la dinámica que posee el movimiento Browniano estocástico, han sido elegidas como medidas de caracterización

el método de análisis de fluctuaciones sin tendencia [94], DFA por sus siglas en inglés, el análisis de la ley potencial generada entre las frecuencias y sus intensidades del espectro de frecuencias de las series temporales [30], la presencia de una distribución de probabilidad de tipo Normal y la existencia de un incremento lineal del desplazamiento cuadrático medio con el tiempo, $\Delta x^2 \sim t^u$, [20], siendo éstas propiedades definidas y reportadas del movimiento Browniano.

4.1 Análisis de series temporales con distribución normal

El fenómeno natural conocido como movimiento Browniano posee una interesante historia [5, 8]. Reportado por primera vez en 1828 por el botánico Robert Brown al exponer en un trabajo científico que granos de polen suspendidos en una sustancia, al ser examinados con un microscopio, éstos realizaban movimientos irregulares e inexplicables. En nuestros días el movimiento Browniano es concebido como el resultado de múltiples colisiones aleatorias de una molécula suspendida en un medio. El poder llegar a ésta concepción tomó a la ciencia poco menos de cien años, debido a la evolución de la teoría cinético-molecular de la materia y la contribución del físico alemán Albert Einstein [95], quien en 1905 aportó al tema brindando la explicación y definición del movimiento Browniano. Las observaciones realizadas a partículas que presentan dinámica de tipo Browniana indican que el fenómeno satisface las siguientes propiedades [96]:

- El movimiento es continuo.
- Las trayectorias generadas presentan desplazamientos independientes con respecto al tiempo.
- Debido al elevado número de colisiones que sufre la partícula sometida a estudio, los incrementos en las trayectorias pueden ser modelados como variables aleatorias Gaussianas.

La estructura matemática de un proceso estocástico, una colección de variables aleatorias, definida como $B_t : t \geq 0$, resulta consistente y efectiva para aproximar de forma

matemática el fenómeno. La variable B_t puede ser interpretada como la posición de la partícula Browniana en un tiempo t . Entonces, para el caso unidimensional, puede definirse al movimiento Browniano como:

- a) $B_0 = 0$ casi seguramente.
- b) Las trayectorias $t \rightarrow B_t$ son continuas casi en todo punto.
- c) El proceso posee incrementos independientes con respecto al tiempo.
- d) La variable B_t tiene una distribución Normal, $N(0, t - s)$, para $0 \leq s < t$.

Es por esta razón que, como método de validación de las medidas a cuantificar, se analiza como primera instancia un conjunto de series temporales generadas de forma numérica, las cuales, deben poseer, las propiedades anteriormente mencionadas.

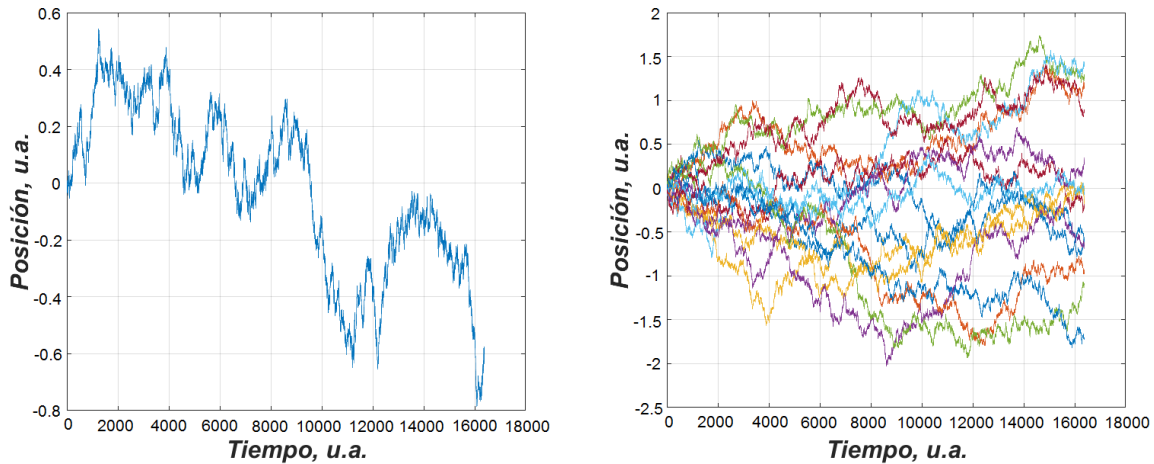


Figura 4.1: Izquierda. Visualización de una serie temporal generada a partir de una distribución de probabilidad de tipo normal. Derecha. Espacio de fase de quince trayectorias normales generales.

Con la finalidad de realizar una calibración de las herramientas de evaluación que se utilizarán, así como el poder caracterizar un comportamiento conocido, se hace uso de un generador de datos con distribución Normal para generar las series temporales mostradas en la Fig. 4.1, las cuales servirán para analizar los resultados obtenidos con los sistemas diseñados.

4.1.1 Análisis de Fluctuaciones sin Tendencia

A pesar de la existencia de distintas herramientas destinadas al análisis de series temporales de sistemas dinámicos con comportamiento caótico, el análisis de fluctuaciones sin tendencia ha resultado ser de gran utilidad en sistemas de éste tipo [85], además de que posee valores definidos para distintos tipos de comportamiento, entre ellos la dinámica de tipo Browniana.

El análisis de series temporales por medio del método de DFA se basa en determinar características de auto-similitud en el comportamiento de la serie temporal, en otras palabras, indica correlaciones de largo alcance presentes en una serie de observaciones a lo largo del tiempo. Cuando la señal analizada presenta una ley de escalas, ésta se rige por la ley de potencias generada por la función de fluctuaciones, *ecuación B.4*, de la forma $F_n \sim \tau^\vartheta$, donde ϑ es llamado el exponente de escalamiento, parámetro que indica las propiedades de correlación de la ley de potencias encontrada en la serie temporal. Existe una serie de exponentes definidos para distintos comportamientos basados en resultados del análisis de fluctuaciones sin tendencia [85, 94], por ejemplo:

- Si $\vartheta = 0.5$ se dice que la serie temporal no presenta correlaciones, ruido blanco.
- Si $\vartheta < 0.5$ la serie temporal se encuentra anti-correlacionada.
- Si $\vartheta > 0.5$ existen correlaciones positivas en la serie analizada.
- Si $\vartheta = 1$ la señal corresponde a un proceso del tipo $\frac{1}{f}$, ruido rosa.
- Si $\vartheta \sim 1.5$ la señal presenta comportamiento de tipo Browniano, ruido café.

Es éste último valor definido para el movimiento Browniano, sobre el cual se explorará la colección de series temporales generadas de forma numérica en búsqueda de comportamiento de tipo Browniano y definir las cotas de validez en la dinámica.

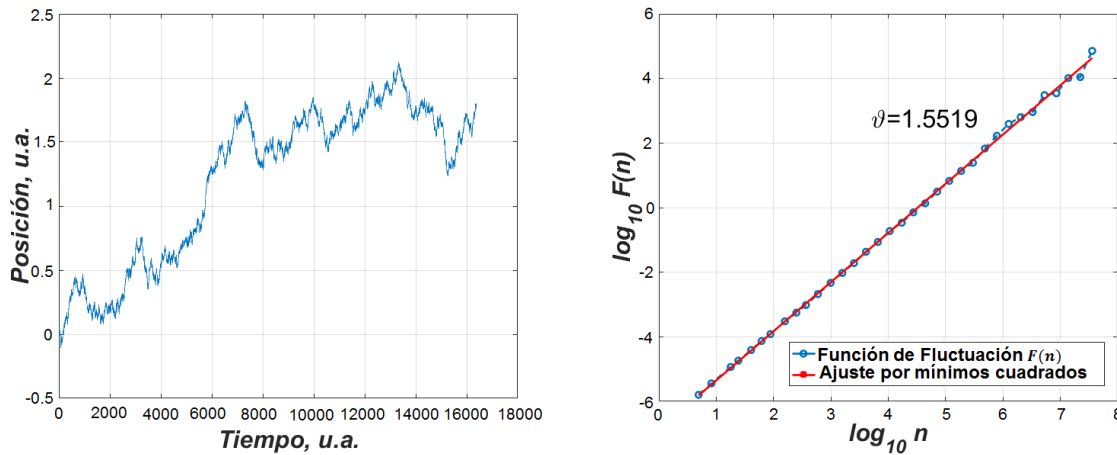


Figura 4.2: *Izquierda.* Visualización de una serie temporal generada a partir de una distribución de probabilidad de tipo Normal. *Derecha.* Gráfica obtenida a partir de la aplicación del método de DFA a la serie temporal, el cuál posee un factor de determinación $r^2 = 0.9989$.

Como resultado de la aplicación del método DFA a una serie temporal de distribución Normal, se obtiene la imagen presentada en la *Fig. 4.2*, donde se muestra el gráfico doble logarítmico entre la función de fluctuaciones $F(n)$, y el intervalo de exploración, n . Se construye una línea recta entre los valores del gráfico, cuya pendiente resulta en el valor del exponente de DFA buscado, con un factor de determinación lo bastante cercano a la unidad como para ser válido, *ecuación B.7*. El resultado coincide con la teoría del método, indicando presencia de comportamiento Browniano en las series temporales generadas.

Tomando como base la generación de mil series temporales, divididas en cinco grupos de doscientas series cada uno, obtenidas a partir de una distribución de probabilidad de tipo Normal, se emplea el análisis de las mismas basadas en el método de DFA. A partir de lo anterior se generan los resultados utilizados para definir los rangos de valores sobre los cuales se desarrollará el análisis de las series temporales obtenidas de los circuitos electrónicos implementados.

La *Fig. 4.3* muestra el comportamiento, en base a DFA, de las series temporales de distribución Normal, siendo estas graficadas tanto en forma de mapa como en un histograma, facilitando la lectura de los valores mínimos y máximos. El mapa de valores toma como eje horizontal el número de la serie temporal explorada, contra el eje vertical correspondiente a los grupos sobre los cuales se segmentó el estudio. Los resultados obtenidos poseen

un rango de valores entre $1.28 \leq \vartheta \leq 1.64$, mismos que coinciden con lo reportado en la literatura para comportamiento de tipo Browniano [85, 94], generándo así los rangos de valores válidos sobre los cuales se analizará la dinámica obtenida de los sistema electrónicos implementados.

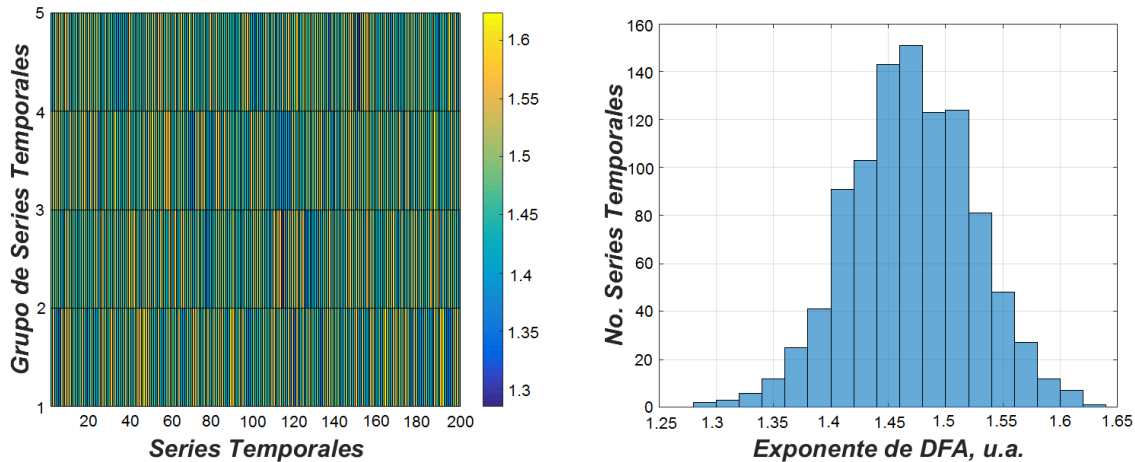


Figura 4.3: *Izquierda.* Mapa de valores de exponente de DFA de series temporales numéricas. *Derecha.* Histograma de distriución de los valores ϑ .

4.1.2 Ley potencial entre frecuencia e intensidad del espectro de potencia

Una ley potencial, o ley de potencias, es un tipo de relación matemática entre dos magnitudes cualquiera, ésta relación se encuentra definida en base a un cambio relativo en una de las magnitudes, lo que dará pie a un cambio proporcional en la segunda magnitud, el cual será independiente a la escala de dichas magnitudes. Una ley potencial puede ser transformada en una relación lineal si las variables estudiadas son representadas en un gráfico doble logarítmico, usualmente ésta es la forma como se demuestra si dos magnitudes poseen una relación generada por una ley de potencias. Las leyes de potencias resultan de gran importancia debido a que son capaces de revelar ciertas regularidades en el comportamiento y propiedades del sistema analizado.

Como el nombre del método lo indica, se estudian las series temporales de distribución Normal en búsqueda de la presencia de leyes de potencias generadas en el espectro de frecuencias. Ésta ley de potencias se representa por la relación $I(\omega) \sim \omega^\rho$, siendo $I(\omega)$ la

intensidad espectral de la componente frecuencial ω , del espectro de potencias de la serie temporal analizada, donde, de acuerdo a lo reportado en [49], el movimiento Browniano posee una ley de potencias de éste tipo con un valor $\rho \sim -2$.

De forma análoga a lo mostrado con el método de DFA, se toma una serie temporal de distribución Normal, a la cual se le calcula el espectro de potencias haciendo uso de la transformada rápida de Fourier, una vez obtenido dicho espectro, éste es graficado en un gráfico doble logarítmico, donde se calcula la pendiente de la línea recta que ajusta los datos, siendo éste valor el exponente propio de la ley de potencias de la serie temporal analizada, *Fig. 4.4*.

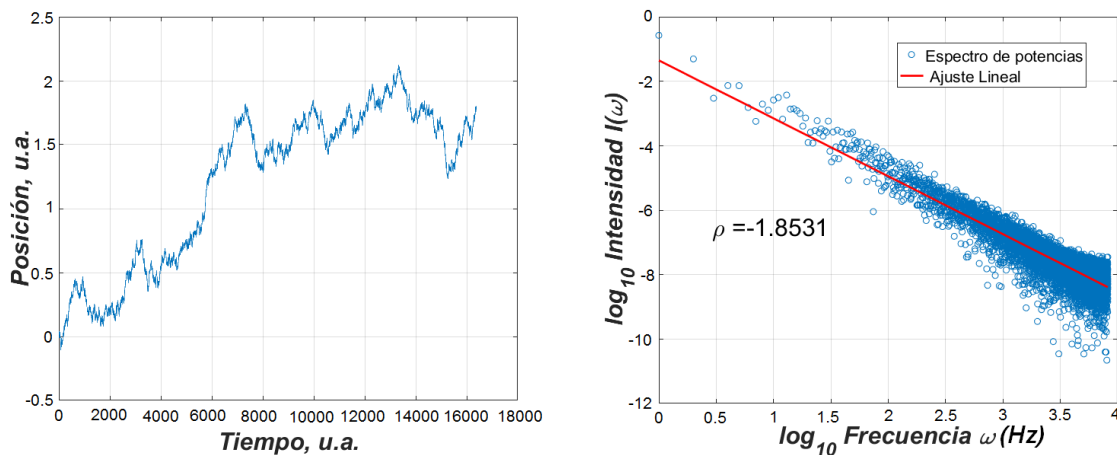


Figura 4.4: *Izquierda.* Visualización de una serie temporal generada a partir de una distribución de probabilidad de tipo Normal. *Derecha.* Gráfico doble logarítmico del espectro de frecuencias para determinar el exponente de la ley de potencias, con factor de determinación $r^2 = 0.9888$.

Una vez más, se toman las mil series temporales generadas, subdivididas en cinco grupos, a las que se les aplica el mismo procedimiento descrito en la *Fig. 4.4*, generando así su correspondiente mapa e histograma de comportamiento en base a la ley potencial existente en el espectro de potencias que las series temporales presentan.

Los resultados mostrados en la *Fig. 4.5* muestran el comportamiento global de las series temporales calculadas, cuyos valores coinciden con lo reportado en la literatura [30], obteniéndose así los intervalos válidos sobre los cuales se caracterizará la dinámica obtenida de los sistemas electrónicos, $-1.6 \leq \rho \leq -2.1$.

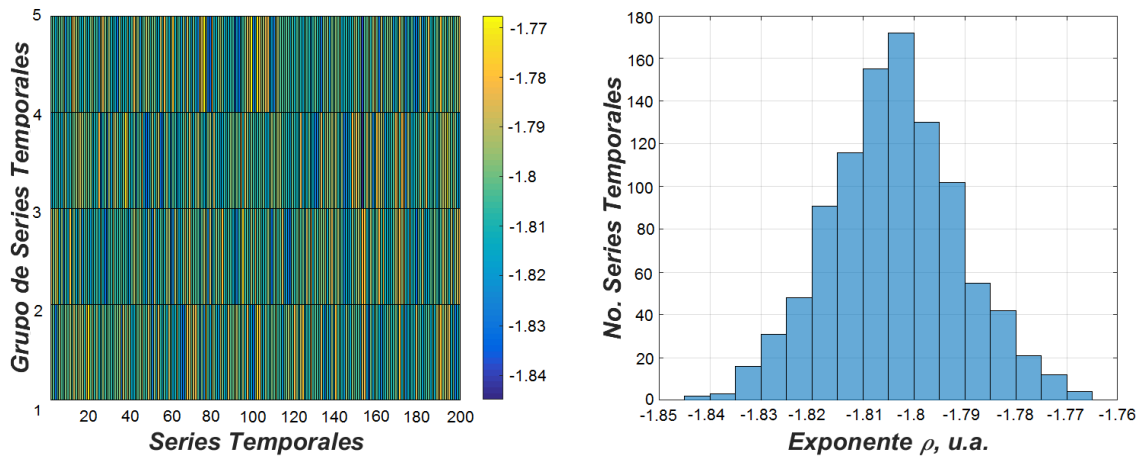


Figura 4.5: *Izquierda.* Mapa de valores de exponente de la ley de potencias de series temporales numéricas. *Derecha.* Histograma de distribución de los valores ρ .

4.1.3 Distribución Normal de probabilidad

La distribución de probabilidad de tipo Normal es el modelo continuo más importante en la estadística, tanto por su aplicación directa como por las propiedades que ésta posee. El nombre de *Normal* proviene del hecho que durante muchos años, se creyó que todas las variables naturales seguían éste tipo de comportamiento [97].

La función de densidad de la distribución Normal se define como:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}; \quad -\infty < x < +\infty \quad (4.1)$$

siendo μ la media de la función y σ la desviación estándar de la misma.

Una gráfica de una distribución Normal, se asemeja mucho, en forma, a una campana, suave, unimodal y simétrica con respecto a su media, donde las curvas se extienden hasta el infinito, tomándo valores teóricamente, desde $-\infty$ hasta $+\infty$. Otra característica importante de éste tipo de probabilidades es que es posible especificar una distribución de tipo Normal por medio de dos parámetros, la media y la desviación estándar, es decir, existe una única distribución Normal para cada combinación de media y desviación estándar. Como ya se mencionó en la definición del movimiento Browniano, el comportamiento descrito por éste fenómeno posee una distribución de probabilidad de tipo Normal, por ello

la importancia de su análisis, ya que las series temporales que poseen comportamiento de tipo Browniano responden a una distribución de probabilidad Normal.

Una consecuencia resultante del hecho de que una curva Normal se pueda especificar únicamente por su media y su desviación estándar, es que el área bajo la curva entre cualquier punto y la media es una función que depende del número de desviaciones estándar a las que dicho punto se encuentra de la media, ésta es la clave para calcular probabilidades que puedan contener una componente Normal.

Como método para la validación de la presencia de normalidad en las series temporales se hace uso de dos técnicas, primero se analiza el histograma de la serie temporal, en búsqueda de una curva de distribución Normal, además de que se realiza un gráfico de probabilidad Normal, el cual compara los datos de la serie temporal analizada contra los que debería de presentar una distribución de probabilidad Normal, si los datos analizados provienen de una distribución de probabilidad Normal éstos se ajustarán, en gran medida, a la línea de valores esperados.

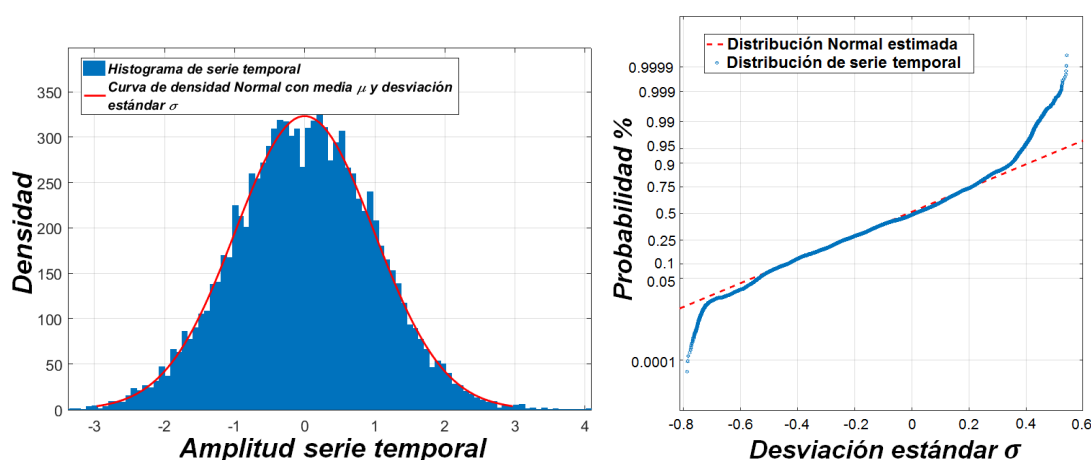


Figura 4.6: *Izquierda.* Histograma de la serie temporal analizada. *Derecha.* Gráfico Normal de la serie temporal analizada.

Tomando la serie temporal mostrada en la Fig. 4.1, se calcula su histograma de frecuencia junto con su curva de distribución de probabilidad, además de la generación de un gráfico Normal, el cual indica presencia de normalidad en una serie temporal, ambos gráficos coinciden con lo esperado por parte de una serie temporal que posee comportamiento de tipo Browniano, o Normal, lo que valida el método de generación de las series tempora-

les de calibración, así como el método para la verificación de presencia de normalidad.

4.1.4 Desplazamiento cuadrático medio

En mecánica estadística, el desplazamiento cuadrático medio, MSD por sus siglas en inglés, es la medida más común para calcular el coeficiente de difusión de partículas con movimiento aleatorio. De manera física, analiza la distancia recorrida de la partícula a lo largo del tiempo. Éste se define, matemáticamente, de la siguiente manera:

$$MSD = \overline{\Delta x^2} = \langle (x(t) - x(0))^2 \rangle \quad (4.2)$$

donde $x(t)$ corresponde a cada una de las observaciones a lo largo del tiempo y $x(0)$ es el punto de referencia sobre el cual se analiza el comportamiento del desplazamiento de la partícula.

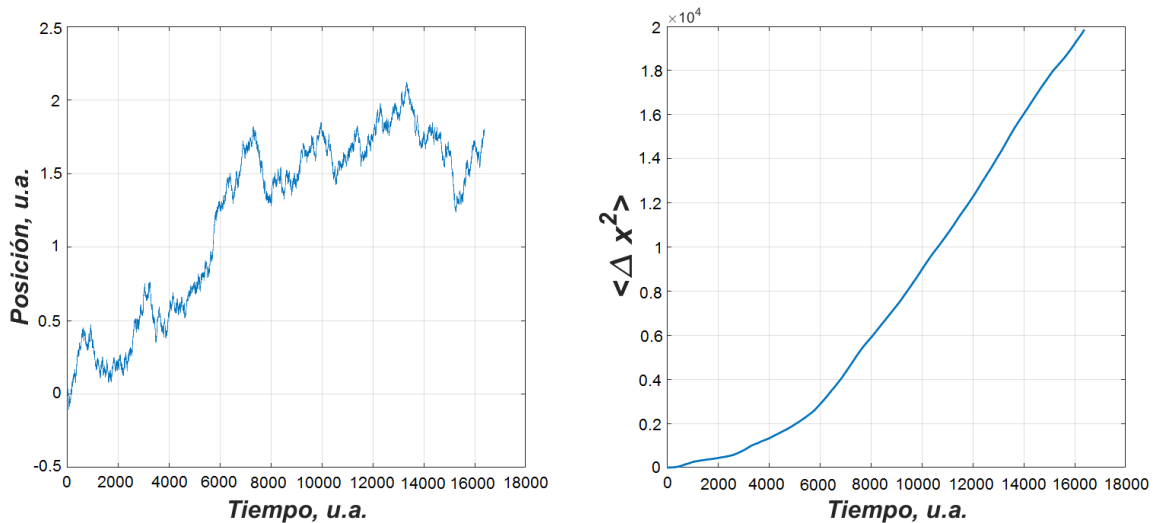


Figura 4.7: Izquierda. Serie temporal con distribución Normal. Derecha. Comportamiento del desplazamiento cuadrático medio de la serie temporal.

Siendo entonces el desplazamiento cuadrático medio una medida del comportamiento de una partícula Browniana, se analizan las series temporales generadas de forma numérica, obteniendo los resultados mostrados en la Fig. 4.7.

En la Fig. 4.7 se observa el comportamiento de la serie temporal, en base a su desplazamiento cuadrático medio, el cual es obtenido con la definición planteada en la ecuación

E. 1, y coincide con lo mostrado en la *Fig. E. 1*, validando así el comportamiento aleatorio de las series temporales.

4.2 Análisis del sistema generador de multi-enroscados

Partiendo del sistema generador de multi-enroscados en su implementación como circuito híbrido, descrito en el *capítulo 3*, se realiza la caracterización de la dinámica del sistema en base a la modificación del parámetro de control, G_1 , haciendo uso de la preparación experimental mostrada en la *Fig. 3.25*, donde las series temporales obtenidas del circuito electrónico son almacenadas en el ordenador para después ser sometidas a los análisis descritos en la sección anterior, esto para identificar regiones de operación del sistema donde la dinámica resultante posea las características del movimiento Browniano.

Debido a que la dinámica del sistema generador de multi-enroscados se desconoce mediante la utilización del modelo planteado, es decir, mediante la utilización de una *SNLF* de cinco niveles y modificar el número de enroscados mediante la modificación de la ganancia de salida, se realiza la correspondiente simulación numérica, esto para validar el funcionamiento del modelo y poder proceder a la caracterización electrónica. La simulación de sistemas multi-enroscados mediante la utilización de métodos numéricos, en plataformas de desarrollo como lo es MatLab, facilita el estudio y diseño de éstos sistemas como paso previo a la implementación de un circuito electrónico para generar comportamientos no lineales.

La simulación numérica se lleva a cabo en el software de programación MatLab, haciendo uso del integrador Runge-Kutta de 4to. orden, de forma idéntica a como se encuentra construido el circuito electrónico, es decir, contemplando los valores de los elementos electrónicos utilizados en la implementación, incluyendo la modificación en la generación de multi-enroscados mediante la modificación del parámetro de control G_1 . Las proyecciones de los espacios xy de la simulación numérica se observan en la *Fig. 4.8*, los cuales coinciden gratamente con la dinámica del circuito electrónico mostrado en la *Fig. 3.23*.

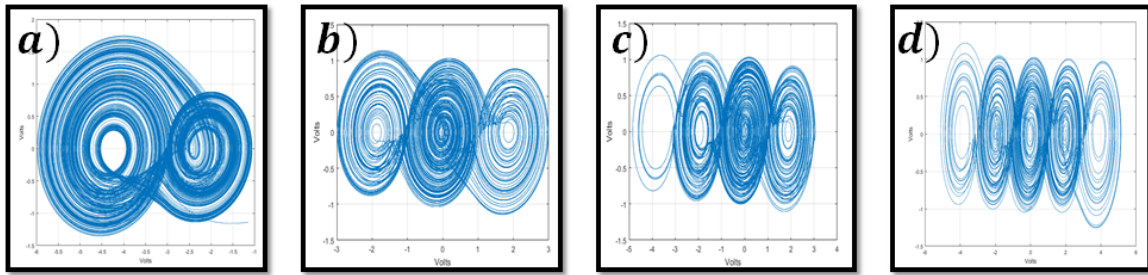


Figura 4.8: Proyecciones en el espacio xy de la respuesta del sistema híbrido simulado en MatLab, para dos, tres, cuatro y cinco enroscados.

Tomando los resultados anteriores como validación del modelo implementado, se realiza un diagrama de bifurcación de máximos locales del circuito híbrido simulado. Dicho diagrama de bifurcación se realiza mediante la exploración de veinte condiciones iniciales, ésto debido a la naturaleza caótica del sistema, y realizando un cambio gradual ascendente en el valor de $G_1 = \frac{R_5^*}{R_i^*}$, ecuación 3.3, con el que el sistema es evaluado.

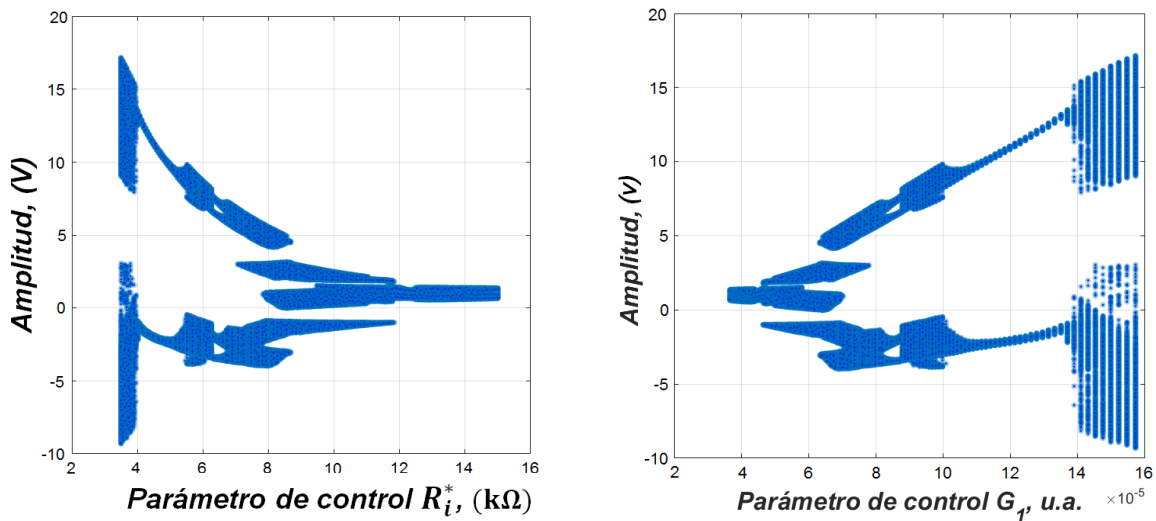


Figura 4.9: Diagramas de bifurcación calculados numéricamente para el comportamiento del circuito híbrido, *Izquierda*, graficado en base a la resistencia de modificación, *Derecha*, graficado en base al valor de la ganancia inyectada al sistema.

Una vez validado el sistema mediante la modificación en la generación de los multi-enroscados, *Fig. 4.8* y *Fig. 4.9*, se realiza la adquisición de datos del circuito experimental para la construcción del correspondiente diagrama de bifurcación, el cual, como lo describe

la máquina de estados propia de la automatización, *Fig. 3.24*, también se realiza mediante la exploración de veinte condiciones iniciales junto con su correspondiente cambio en el valor de ganancia G_1 .

Los resultados mostrados en la *Fig. 4.10* presentan una correspondencia con los resultados mostrados en la *Fig. 4.9*, indicando una correcta sustitución de la función de saturación con la tarjeta de adquisición de datos, lo que permite realizar una exploración en el comportamiento del sistema de una manera más detallada y con una inversión de tiempo mucho menor.

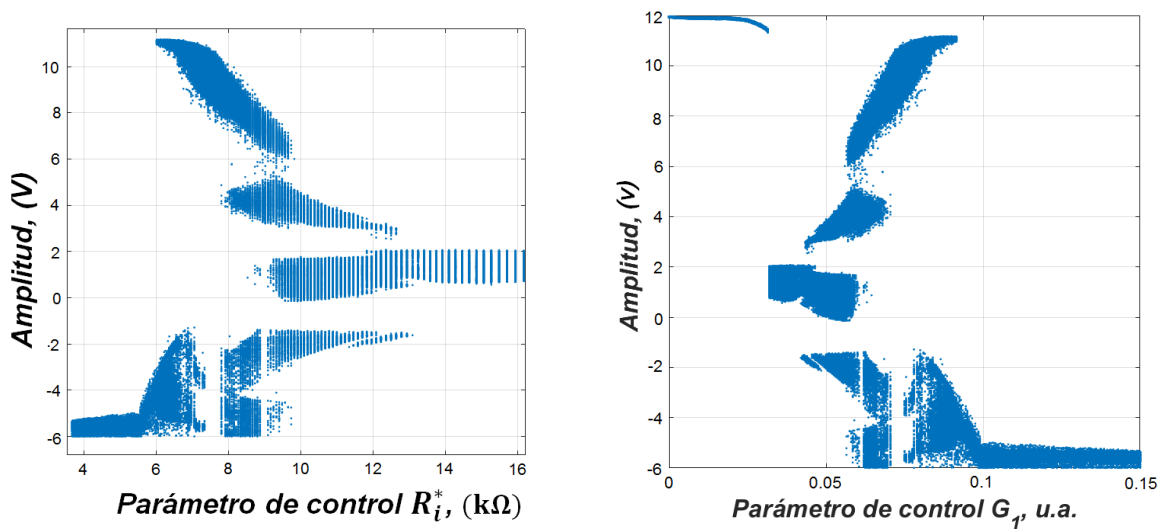


Figura 4.10: Diagramas de bifurcación obtenidos del circuito híbrido, *Izquierda*, graficado en base a la resistencia de modificación, *Derecha*, graficado en base al valor de la ganancia inyectada al sistema.

4.2.1 Análisis de Fluctuaciones sin Tendencia

Tomando las series temporales obtenidas del proceso de adquisición de datos experimentales, descrito en la sección anterior, con las que se obtuvieron los diagramas de bifurcación mostrados en la *Fig. 4.10*, son sometidas al estudio de fluctuaciones sin tendencia con la finalidad de encontrar una región de operación del sistema en la cual, la respuesta posea un comportamiento propio del movimiento Browniano, en base a ésta métrica.

El procedimiento seguido es similar al necesario para la construcción de un diagrama de bifurcación, se toma una serie temporal que es estudiada en base al análisis de DFA, lo que

proporciona un solo valor por serie temporal, de las veinte series almacenadas correspondientes a cada una de las condiciones iniciales exploradas por cada parámetro de control analizado, lo que, al final, genera una curva de valores que describen el comportamiento del sistema en base a su DFA. Recordando las cotas obtenidas en la *sección 4.1.1*, las cuales describen el rango de valores aceptado para dinámica de tipo Browniana, se genera el gráfico siguiente, *Fig. 4.11*.

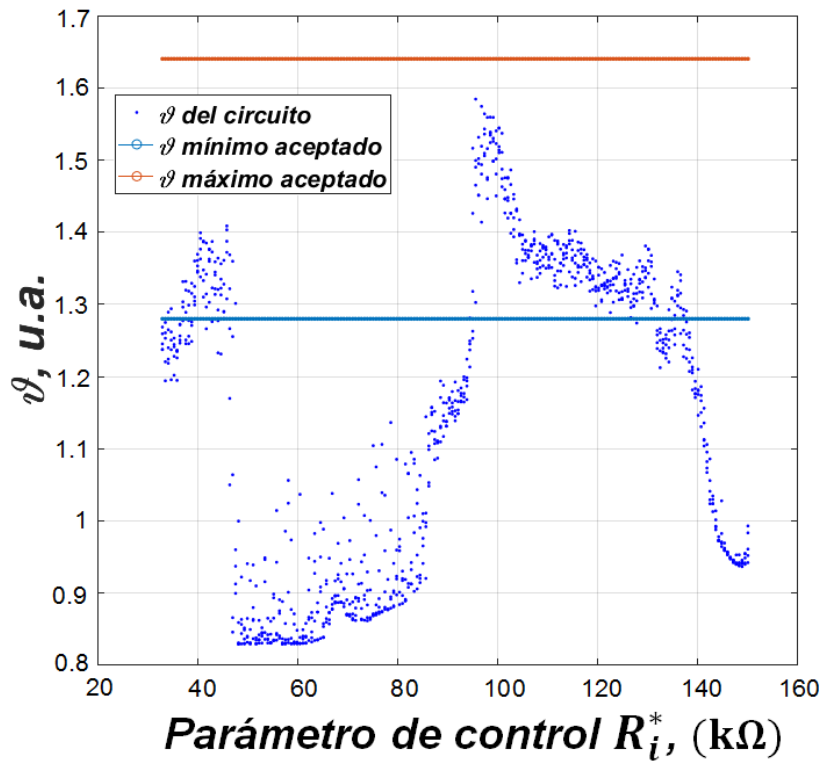


Figura 4.11: Comportamiento del sistema generador de multi-enrosados, híbrido, a lo largo de la modificación del parámetro de control mediante el análisis de fluctuaciones sin tendencia.

Al analizar el comportamiento del sistema generador de multi-enrosados mediante el análisis de fluctuaciones sin tendencia, se pueden identificar regiones en las que su dinámica posee componentes propias del comportamiento Browniano, $30k\Omega < R_i^* < 48k\Omega$ y $100k\Omega < R_i^* < 138k\Omega$, siendo la primera región de valores descartada debido a que en este punto el sistema presenta un atractor saturado y no hay dinámica, aunque esto no permite la aseveración de la existencia de tal comportamiento en los resultados obtenidos, marca la

pauta para proseguir en los estudios en busca de propiedades de tipo Brownianas en el comportamiento del sistema.

4.2.2 Ley potencial entre frecuencia e intensidad del espectro de potencia

De forma análoga a lo mostrado en el análisis de fluctuaciones sin tendencia, las series temporales obtenidas del circuito híbrido son sometidas al análisis de leyes potenciales existentes en el espectro de frecuencias. Cada serie temporal analizada genera un sólo valor en el exponente ρ , el cual es graficado en base al parámetro de control y contemplando los valores mínimos y máximos obtenidos en la *sección 4.1.2* para el comportamiento de dinámica Browniana, bajo éste esquema de análisis, se genera el gráfico mostrado en la *Fig. 4.12*.

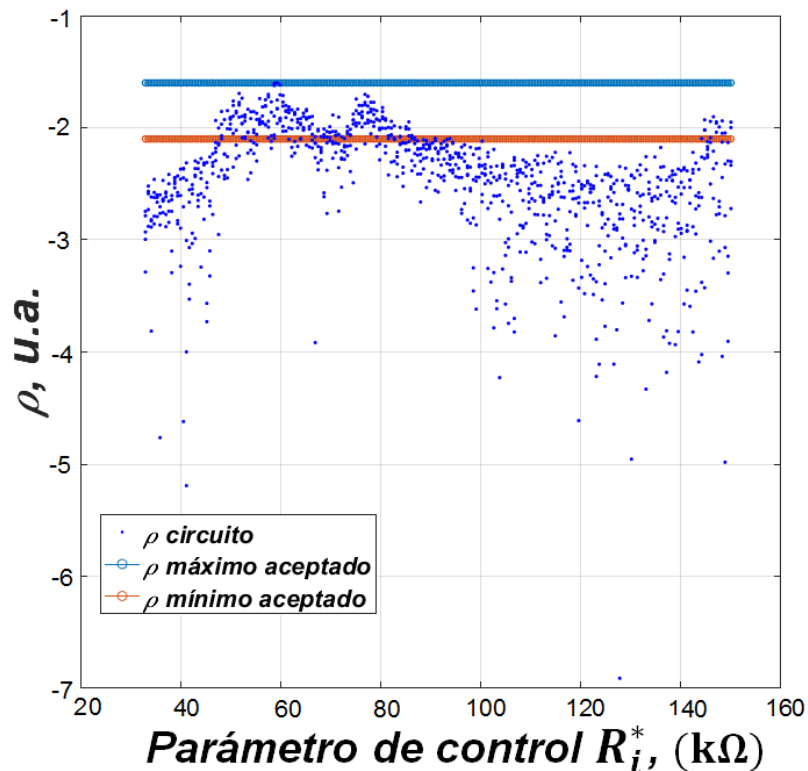


Figura 4.12: Comportamiento del sistema generador de multi-enrosados, híbrido, a lo largo de la modificación del parámetro de control mediante el análisis de leyes de potencia.

Al analizar el comportamiento del sistema en base a su exponente ρ , se puede identificar una región en la cual la dinámica concuerda con lo esperado para una serie temporal que posee comportamiento de tipo Browniano. En contra parte, ésta zona de correspondencia no es la misma a la encontrada mediante el análisis de fluctuaciones sin tendencia, indicando que, aunque de forma individual con respecto a los dos análisis implementados al sistema, éste presente componentes que pudieran responder a dinámica de tipo Browniana, en conjunto, no lo hacen, negando así la presencia de tal comportamiento en el sistema generador de multi-enroscados.

El análisis del sistema generador de multi-enroscados en búsqueda de dinámica de tipo Browniana concluye en éste punto, ya que sin zonas equivalentes de operación con respecto al análisis de DFA y leyes de potencias, los resultados que se obtendrían del análisis para encontrar una distribución de probabilidad Normal, DPN, y el comportamiento del desplazamiento cuadrático medio, MSD, no serían suficientes para confirmar la dinámica deseada. Sin embargo, con éstos resultados se define el procedimiento para abordar la búsqueda de dinámica de tipo Browniana sobre los resultados del segundo modelo electrónico a estudiar, pudiéndose resumir en el siguiente diagrama de flujo, *Fig. 4.13*.

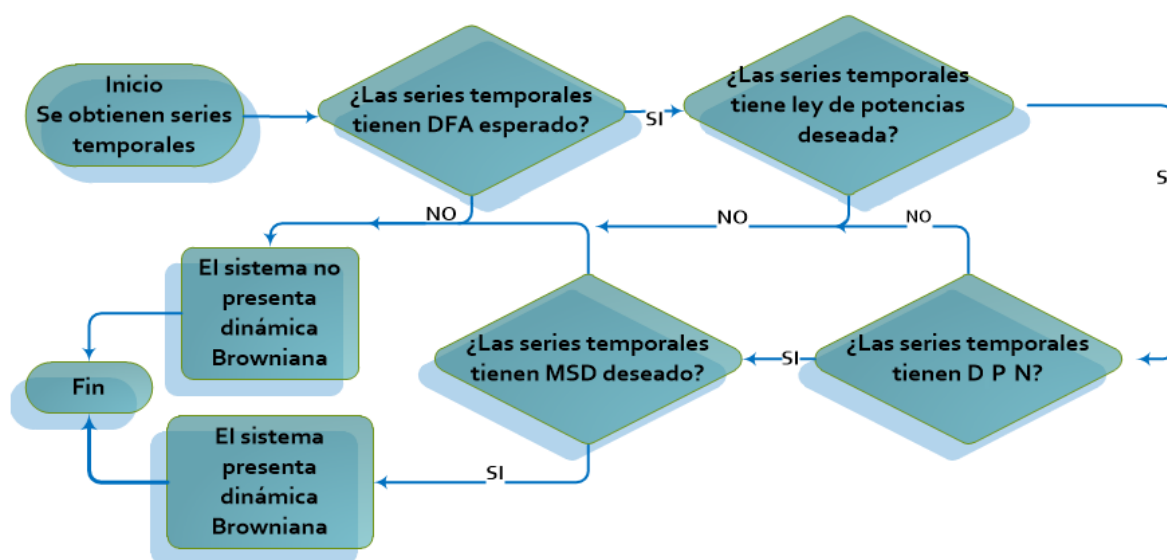


Figura 4.13: Diagrama de flujo del proceso para encontrar dinámica de tipo Browniana en resultados experimentales.

4.3 Análisis de sistema generador de movimiento Browniano

Tomando como punto de partida el sistema de ecuaciones diferenciales que aproximan la generación de movimiento Browniano de forma determinista, *ecuación 3.9*, se realiza un análisis en el comportamiento de la dinámica del sistema, de forma similar a lo realizado con el sistema generador de multi-enroscados. Partiendo del circuito electrónico propuesto en la *Fig. 3.17*, *Fig. 3.18*, así como del proceso experimental descrito en la *Fig. 3.24*, *Fig. 3.25*, para realizar el proceso de adquisición de señales generadas desde el circuito electrónico. El modelo experimental para la adquisición de datos también se basa en un sistema híbrido, en el cual la función de saturación, α_4 , es generada desde la tarjeta de adquisición de datos *dSPACE1104* mediante la ejecución de una aplicación en tiempo real en la plataforma de programación Simulink. El parámetro de control en el cual se basará la adquisición de datos es la variable C_1 , mismo que se encuentra dentro de la definición de la función de saturación, *ecuación 3.9*, mientras que el valor de C_2 es constante, $C_2 = 0.6$.

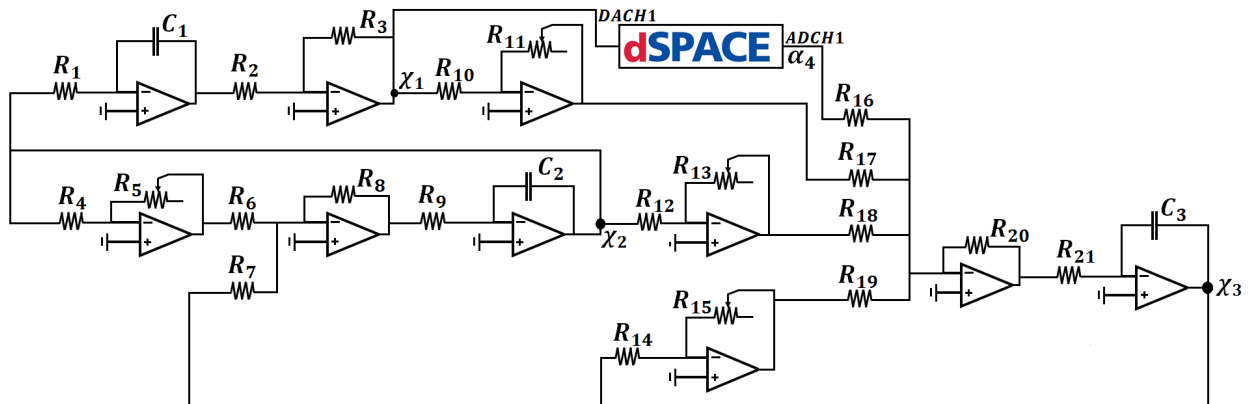


Figura 4.14: Esquema del circuito electrónico, híbrido, del modelo generador de movimiento Browniano.

Una vez definido el arreglo experimental, se definen las combinaciones de valores a explorar, las cuales son elegidas de acuerdo a la definición de un sistema disipativo inestable de primer tipo, y se encuentran englobadas en el volumen que describe el comportamiento del sistema bajo el régimen UDS *I* de la *Fig. 3.14*, mismas que se muestran en el *Cuadro H.1-H.3*. Los valores propios mostrados en las tablas de combinaciones son separados en

sus componentes reales e imaginarias, $\lambda_{1-3} = \sigma_{1-3} + i\omega_{1-3}$.

4.3.1 Análisis de Fluctuaciones sin Tendencia

El procedimiento para realizar el análisis de fluctuaciones sin tendencias en base a los resultados obtenidos del circuito electrónico basado en el modelo generador de movimiento Browniano se resume en los siguientes puntos:

- 1.- Se toma una combinación de valores comprendidas en los *Cuadros H.1-H.3*, las cuales corresponden a una dinámica de tipo UDS *I*.
- 2.- Se realiza la adquisición de series temporales experimentales mediante la modificación del parámetro de control C_1 , haciendo uso de la preparación experimental mostrada en la *Fig. 3.25*.
- 3.- Se aplica, a todas las series temporales obtenidas, el análisis de fluctuaciones sin tendencia.
- 4.- Si las series temporales obtenidas, en algún punto del rango de valores del parámetro de control, presentan valores en su exponente ϑ deseados, se incluye en la tabla, de lo contrario se dice que dicha combinación en los parámetros de control α_i , no es de interés.

Muestra de lo descrito en los puntos anteriores, es lo ejemplificado en la siguiente figura, *Fig. 4.15*.

En la *Fig. 4.15*, se aprecia tanto el diagrama de bifurcación en máximos locales como la curva obtenida del sistema cuando se somete al análisis de fluctuaciones sin tendencia, como resultado de esto se tiene que el sistema, para ésta combinación de valores explorados, $\alpha_1 = 0.7$, $\alpha_2 = 1.2$, $\alpha_3 = 0.1$, no presenta dinámica con valores en el exponente ϑ deseada, lo que la excluye del cuadro siguiente, *Cuadros H.4-H.5*, el cual se encuentra formado por todas las combinaciones de valores que sí responden con un exponente de DFA deseado, $1.28 \leq \vartheta \leq 1.64$, del total de combinaciones mostradas en los *Cuadros H.1-H.3*.

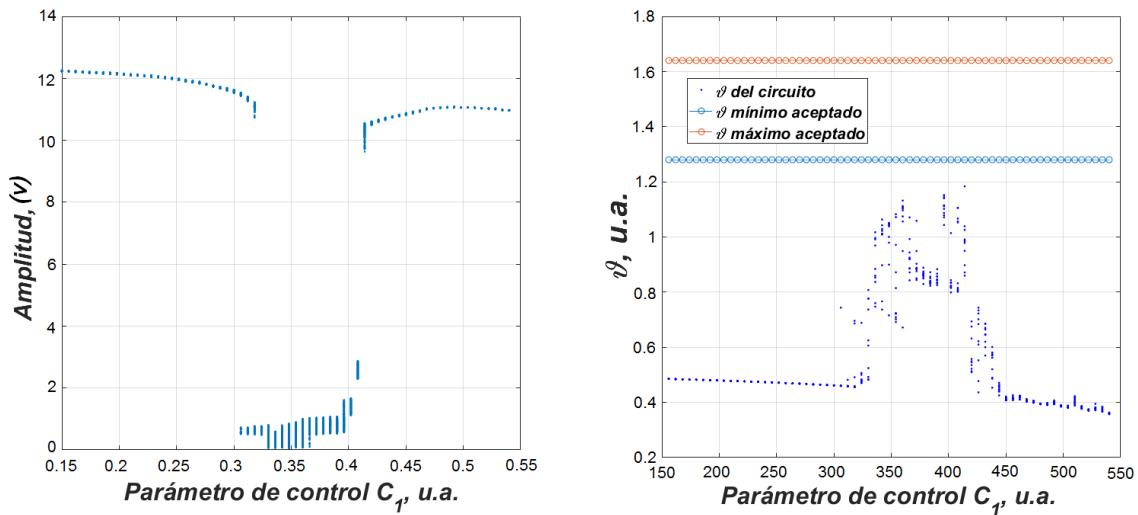


Figura 4.15: *Izquierda.* Diagrama de bifurcación de máximos locales para $\alpha_1 = 0.7$, $\alpha_2 = 1.2$, $\alpha_3 = 0.1$, *Derecha.* Curva de exponente ϑ de la combinación de parámetros de control explorada.

4.3.2 Ley potencial entre frecuencia e intensidad del espectro de potencia

El análisis realizado en búsqueda de leyes de potencias existentes en el espectro de potencia, se lleva a cabo de forma similar a lo mostrado en el análisis de fluctuaciones sin tendencia, en base a las combinaciones de valores que presentan un exponente de DFA mismo que concuerda con lo esperado para series temporales de naturaleza aleatoria, se realiza el estudio de leyes potenciales, conforme al diagrama de flujo mostrado en la Fig. 4.13. Como resultado se obtiene la siguiente tabla de combinaciones, en las cuales, el sistema posee, hasta éste punto del análisis, tanto una ley de potencias con exponente $-1.6 \leq \rho \leq -2.1$ como un valor $1.28 \leq \vartheta \leq 1.64$.

En la Fig. 4.16 se aprecian dos curvas, una en base al exponente ϑ , propio del análisis de fluctuaciones sin tendencia del sistema con parámetros de control $\alpha_1 = 1.5$, $\alpha_2 = 1.3$, $\alpha_3 = 0.1$, y la curva del exponente ρ , donde se valida que la zona donde el sistema posee un valor en DFA dentro del rango de valores esperados, coincide con el exponente de ley potencial del espectro de potencias. Éste análisis se realiza para todas las combinaciones mostradas en el Cuadro H.4-H.5, dando como resultado la siguiente cuadro de

combinaciones, *Cuadro H.6*, las cuales coinciden, como en la figura anterior, en zonas de operación con respecto a exponentes deseados.

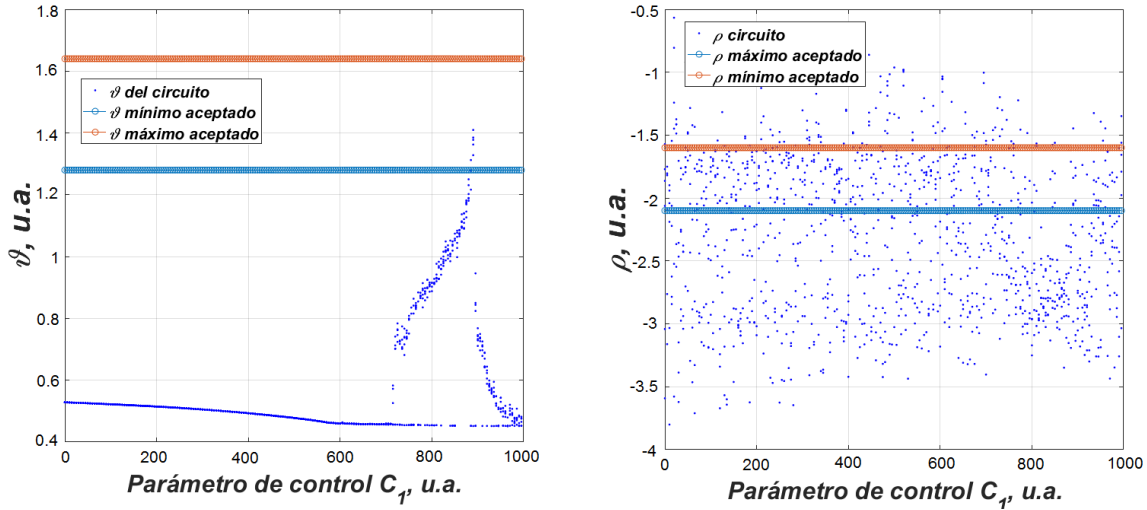


Figura 4.16: *Izquierda.* Diagrama de bifurcación de máximos locales para $\alpha_1 = 1.5$, $\alpha_2 = 1.3$, $\alpha_3 = 0.1$, *Derecha.* Curva del exponente φ de la combinación de parámetros de control explorada.

4.3.3 Distribución Normal de probabilidad

El análisis de los resultados obtenidos hasta éste punto, *Cuadro H.6*, en búsqueda de presencia de componente normal en las series temporales se lleva a cabo de la siguiente manera:

- Se toma una combinación de valores comprendida en el *Cuadro H.6*, misma donde se determina el valor de C_1 que coincide con la dinámica del sistema, tanto en DFA como ley de potencias.
- Una vez identificada la zona de coincidencia, se analizan las series temporales de el, o los, parámetros de control en búsqueda de componente Normal, mediante el análisis de histogramas y gráficos de probabilidad Normal.
- Si las series temporales analizadas concuerdan con lo esperado para elementos de distribución Normal, la combinación analizada se incluye en el cuadro correspondiente, de lo contrario se descarta como posible candidata a poseer la dinámica deseada.

Ejemplo del proceso descrito se ve reflejado en la *Fig. 4.17*, en la cual se muestra el análisis realizado a tres series temporales propias de la combinación de parámetros de control $\alpha_1 = 1.5$, $\alpha_2 = 1.3$, $\alpha_3 = 0.1$. Una vez realizado el análisis sobre el total de series temporales comprendidas en el *Cuadro H.6*, se construye el *Cuadro H.7*, que contiene todas las combinaciones en parámetros de control, las cuales cumplen con una distribución de tipo Normal, excluyéndose de éste aquellas combinaciones cuya respuesta en la dinámica no presenta distribuciones propias de tipo Normal.

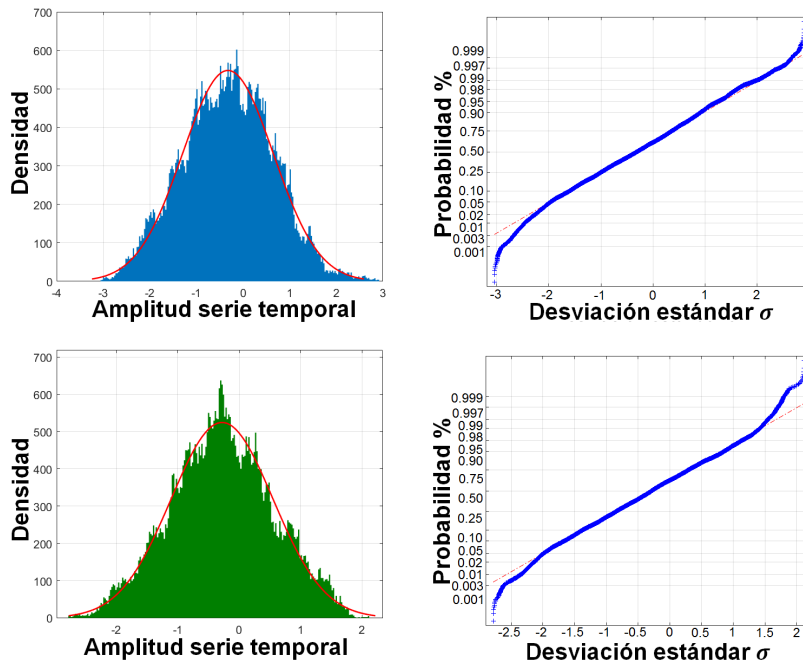


Figura 4.17: Análisis de series temporales del sistema electrónico, para la combinación de valores $\alpha_1 = 1.5$, $\alpha_2 = 1.3$, $\alpha_3 = 0.1$, en búsqueda de normalidad.

4.3.4 Desplazamiento cuadrático medio

De forma análoga a lo mostrado anteriormente, se analizan las series temporales de las combinaciones de valores comprendidas en el *Cuadro H.7*, las cuales cumplen los tres análisis previos, el análisis de fluctuaciones sin tendencia, ley potencial en el espectro de potencias y poseen comportamiento Normal en su dinámica, por lo que, como último proceso al que se someten, se analiza el comportamiento de las mismas bajo el análisis del desplazamiento cuadrático medio, el cual debe coincidir con lo observado en la *Fig. E.1* y

en la Fig. E.4, esto para confirmar la generación de dinámica con componente Browniana mediante el circuito descrito por la ecuación 3.9, ecuación 3.13 y la Fig. 3.17.

Como resultado del análisis del desplazamiento cuadrático medio, se tiene que las siguientes combinaciones en los parámetros de control, Cuadro 4.1 y Cuadro H.8, cumplen con los cuatro análisis descritos en la Fig. 4.13, ejemplo de esto se aprecia en la Fig. 4.18, 4.19, donde a partir de una de las combinaciones de los parámetros de control, $\alpha's$, se analiza una de las series temporales donde la dinámica cumple con los cuatro análisis desarrollados.

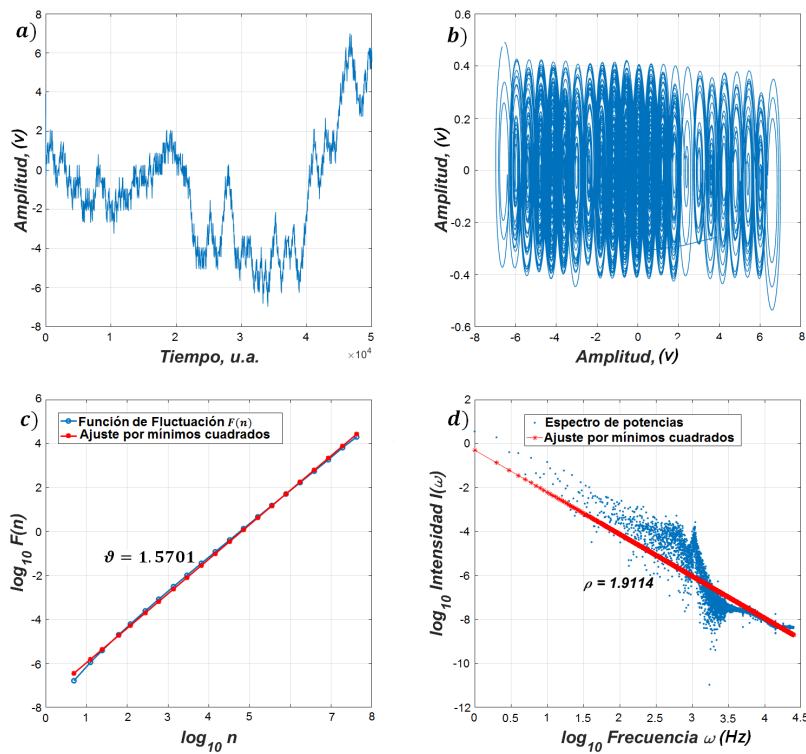


Figura 4.18: Análisis de serie temporal del sistema electrónico, para la combinación de valores $\alpha_1 = 1.5$, $\alpha_2 = 1.7$, $\alpha_3 = 0.7$.

Como se puede apreciar en la Fig. 4.18 y 4.19, la serie temporal de la variable x , es sometida a los cuatro análisis en búsqueda de aleatoriedad en su comportamiento, Fig. 4.18 a), así como la respuesta del sistema se muestra en su espacio de fase, Fig. 4.18 b).

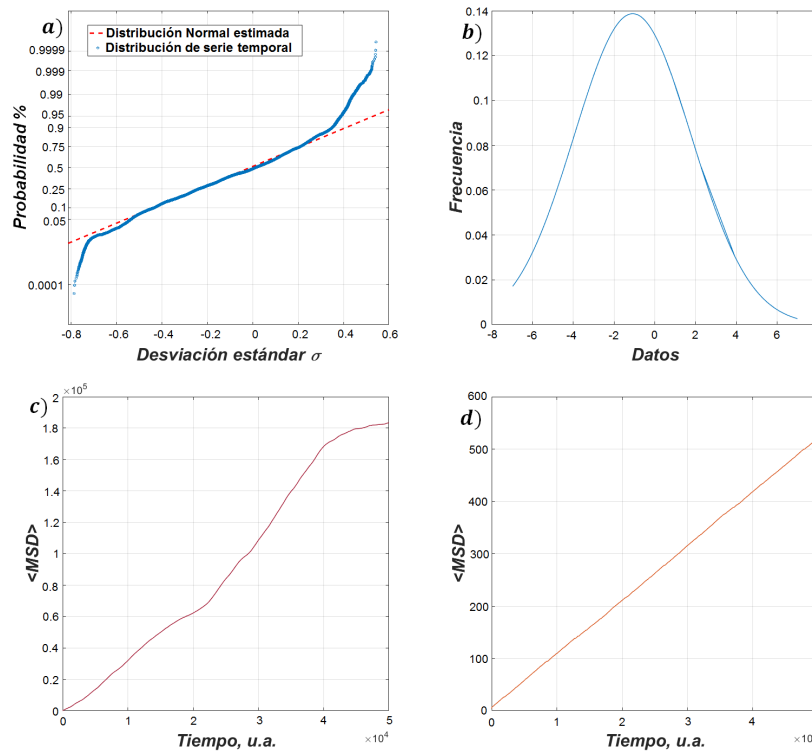


Figura 4.19: Análisis de serie temporal del sistema electrónico, para la combinación de valores $\alpha_1 = 1.5$, $\alpha_2 = 1.7$, $\alpha_3 = 0.7$.

La serie temporal de la variable de estado x es sometida al análisis de fluctuaciones sin tendencia *Fig. 4.18 c)*, arrojando un exponente $\vartheta = 1.57$, el cual concuerda con los rangos de valores permitidos para series temporales de distribución Normal, y un coeficiente de determinación $r^2 = 0.9995$.

Una vez que la serie temporal cumple en su análisis para DFA, ésta es sometida al análisis de leyes potenciales en el espectro de potencias, *Fig. 4.18 d)*, y presenta un exponente $\rho = -1.91$, así como un coeficiente de determinación $r^2 = 0.9256$, consistente con el rango de valores permitidos obtenidos en la *sección 3.1.2*, lo que permite analizar a la serie temporal para determinar si ésta posee una distribución de tipo Normal, lo que se comprueba mediante el análisis del gráfico de probabilidad Normal y la curva de distribución de la serie temporal, *Fig. 4.19 a-b)*. Por último se valida el comportamiento del sistema en base a su desplazamiento cuadrático medio con respecto al origen, *Fig. 4.19 c)*, y con respecto al punto anterior, es decir, la distancia recorrida en cada momento, *Fig. 4.19 d)*. Resultando los cuatro análisis positivos; ésta combinación de valores es incluida en el *Cuadro 4.1* y

Cuadro H.8, mismo en que se ven agrupadas todas las combinaciones que cumplen con los cuatro análisis descritos. En la Fig. 4.20, se aprecia la comparativa del volumen total sobre el cual se caracterizó al sistema electrónico, contra la ubicación espacial, con respecto a los parámetros de control, de las combinaciones de valores que presentan un comportamiento propio de un sistema de tipo Browniano.

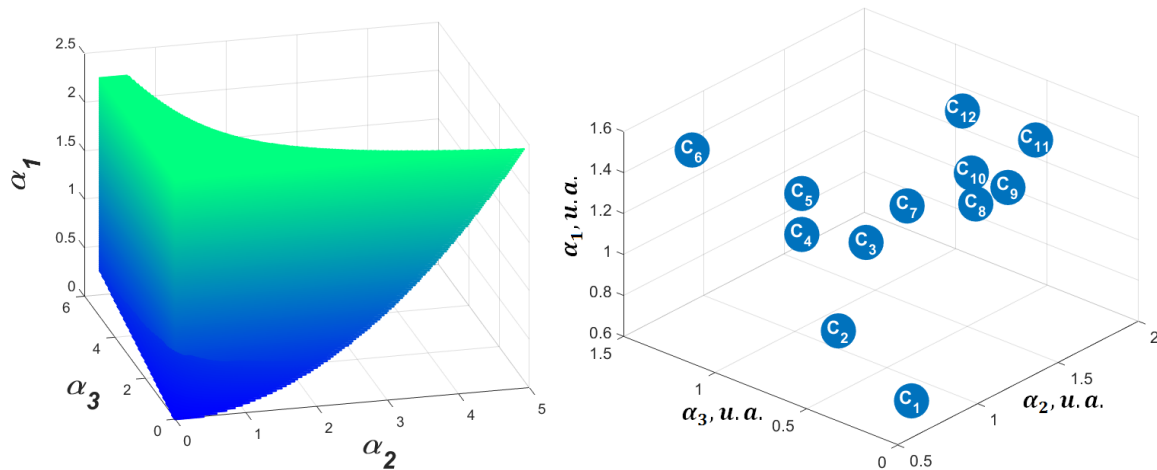


Figura 4.20: *Izquierda*. Volúmen de comportamiento del sistema generador de movimiento Browniano bajo el régimen de un sistema UDS I , *Derecha*. Combinaciones de valores en los parámetros de control que cumplen con las características de un sistema que presenta movimiento Browniano.

Combinaciones de valores con comportamiento Browniano.													
Comb.	α_1	α_2	α_3	$-\sigma_1$	σ_2	ω_2	Comb.	α_1	α_2	α_3	$-\sigma_1$	σ_2	ω_2
C_1	0.7	0.7	0.1	0.67	0.23	$0.98i$	C_7	1.5	0.9	0.3	0.99	0.29	$1.19i$
C_2	0.9	0.7	0.5	0.89	0.14	$0.99i$	C_8	1.5	1.1	0.1	0.87	0.33	$1.26i$
C_3	1.1	1.1	0.7	0.88	0.04	$1.11i$	C_9	1.5	1.3	0.1	0.82	0.31	$1.31i$
C_4	1.3	0.7	0.7	1.13	0.16	$1.05i$	C_{10}	1.5	1.3	0.3	0.86	0.26	$1.29i$
C_5	1.5	0.7	0.7	1.20	0.20	$1.10i$	C_{11}	1.5	1.7	0.3	0.75	0.17	$1.40i$
C_6	1.5	0.7	1.3	1.5	0.05	$0.99i$	C_{12}	1.5	1.7	0.7	0.83	0.01	$1.34i$

Cuadro 4.1: Combinaciones de valores explorados que poseen componente Browniana en base a los análisis realizados.

5

Conclusiones

En el presente trabajo se llevó a cabo la implementación y estudio, tanto teórico como experimental, de dos osciladores definidos por ecuaciones diferenciales deterministas en búsqueda de dinámica de tipo aleatoria, semejante a la exhibida por un sistema Browniano, mediante el estudio de sus respuestas en base a cuatro estudios, cuyos valores se encuentran definidos para la dinámica deseada, i) la aplicación del método de Análisis de Fluctuaciones sin Tendencia, ii) la búsqueda de leyes de escalamiento presentes en el espectro de potencias, iii) la existencia de componentes de tipo Normal en la respuesta del sistema, iv) así como el comportamiento del desplazamiento cuadrático medio. El estudio y resultados aquí presentados se ven divididos en dos modelos analizados, en primer lugar un sistema generador de multi-enroscados y en segunda instancia, tomando como base el comportamiento del sistema generador de multi-enroscados, un sistema de ecuaciones el cual aproxima, teóricamente, la generación de movimiento Browniano.

En lo que refiere al sistema generador de multi-enroscados, se verificaron los paráme-

tros requeridos para obtener la generación de dos hasta cinco enroscados. Además, se obtuvieron diagramas de bifurcación, en base a la modificación de la amplitud de la función de saturación, que muestran la evolución en la dinámica de los multi-enroscados al ser modificado un parámetro de control del sistema. Dicha respuesta fué analizada en búsqueda de comportamiento semejante al que presenta el movimiento Browniano, mediante la aplicación del Análisis de Fluctuaciones sin Tendencia y la búsqueda de leyes de escalamiento en el espectro de potencias, concluyéndose así que dicho modelo, no posee el mencionado comportamiento aleatorio.

Tomando como base el modelo generador de multi-enroscados, *ecuación 3.1*, se diseñó y caracterizó un oscilador, el cual es capaz de generar hasta 24 multi-enroscados. Los resultados exhibidos por el prototipo experimental muestran una satisfactoria correlación con el modelo numérico [35]. Los resultados de dicha caracterización fueron sometidos a diversos análisis en búsqueda de comportamiento similar al movimiento Browniano clásico, como el Análisis de Fluctuaciones sin Tendencia, la búsqueda de existencia de leyes de escalamiento en el espectro de potencias, la presencia de Normalidad en las series temporales, así como un comportamiento lineal, en un intervalo de tiempo, del desplazamiento cuadrático medio, con lo que se encontró una región de valores, en base a los parámetros de control del modelo, donde la dinámica del oscilador es coherente con lo esperado para un sistema con dinámica Browniana.

En síntesis, los objetivos planteados en la *sección 1.5* fueron alcanzados mediante el estudio y caracterización del modelo generador de hasta cinco multi-enroscados, analizando la respuesta del sistema a la modificación en la amplitud de la función de saturación, G_1 , *ecuación 3.3*, así como el análisis del comportamiento de los puntos fijos del sistema mediante la variación de los parámetros de control, a , b , c , d , con el objetivo de encontrar los parámetros para los cuales el sistema estudiado se comporta como un sistema disipativo inestable de tipo uno, UDS I , característica principal que define a un sistema generador de multi-enroscados. Partiendo de este análisis realizado al sistema generador de multi-enroscados, se desarrolló de forma similar en el modelo numérico del sistema generador de movimiento Browniano, generándose así el **discretizador de parámetros de control para obtener puntos fijos con una configuración que responda a un sistema UDS I** , **Código G.1**, con el cuál es posible determinar si un triplete de valores, en los parámetros de

control del modelo, corresponden a un sistema de tipo disipativo inestable de primer tipo, lo que favorecerá la generación de multi-enroscados, cuyos resultados pueden ser consultados en el mapa de comportamiento del sistema bajo un régimen del tipo UDS *I*, *Fig. 3.13*, y el volúmen de comportamiento global del sistema generador de movimiento Browniano en un comportamiento regido por un sistema UDS *I*, *Fig. 3.14*.

También se **diseñó e implementó el oscilador correspondiente a la ecuación 3.13**, mismo que se caracterizó mediante la modificación de la amplitud en la función de saturación del sistema, cuyos resultados fueron sometidos a cuatro análisis en búsqueda de comportamiento aleatorio propio del movimiento Browniano clásico, **concluyendo que dicho modelo, ecuación 3.9, junto con su implementación física, ecuación 3.13, Fig. 3.16, es capaz de generar dinámica de forma determinista que posee propiedades del movimiento Browniano estocástico, Fig. 4.20, Cuadro 4.1 y Cuadro H.8**, con lo que se valida la hipótesis planteada en la *sección 1.4*, la generación de dinámica de un oscilador electrónico, a partir de un sistema de ecuaciones diferenciales deterministas, la cuál posee características propias de un sistema Browniano.

Los resultados obtenidos muestran que es posible, de acuerdo con los análisis realizados, llevar a cabo la generación de ruido similar al Browniano, para lo que será necesario estudiar las posibles aplicaciones en el estudio con sistemas reales, así como buscar su comparación y adecuación, con la dinámica generada por partículas reales en diferentes flúidos.



El Amplificador Operacional y sus configuraciones

Actualmente, el término amplificador operacional se refiere a un circuito integrado que se emplea en una gran variedad de aplicaciones. Éste tipo de amplificadores se originó en la década de 1940 junto con la llegada de las computadoras analógicas, en las que se hacía uso de éstos dispositivos para realizar operaciones tales como la integración o la suma de señales; de ahí el nombre de operacional. El término de amplificador deriva del concepto de un amplificador de corriente continua, donde las características de operación estaban determinadas por los elementos de retroalimentación utilizados. Se puede combinar el uso de amplificadores operacionales, *AO* ú *op-amp* (operational amplifier), con redes de retroalimentación resistivas y capacitivas para obtener varios tipos de configuraciones de operacionales, debido a que, por las características del AO, la respuesta del sistema de-

penderá de la configuración seleccionada y los valores de los elementos utilizados, [98, 99].

A.1 Características de los amplificadores operacionales

El amplificador operacional es un elemento electrónico representado de forma gráfica con el símbolo mostrado en la *Fig. A.1 Izquierda*. El esquema se compone de dos terminales a la entrada, una entrada inversora, indicada con el signo -, y una entrada no inversora, señalada con el signo +. Generalmente los operacionales son representados con una sola salida, aunque en la práctica un solo circuito integrado de éste tipo puede tener más de una.

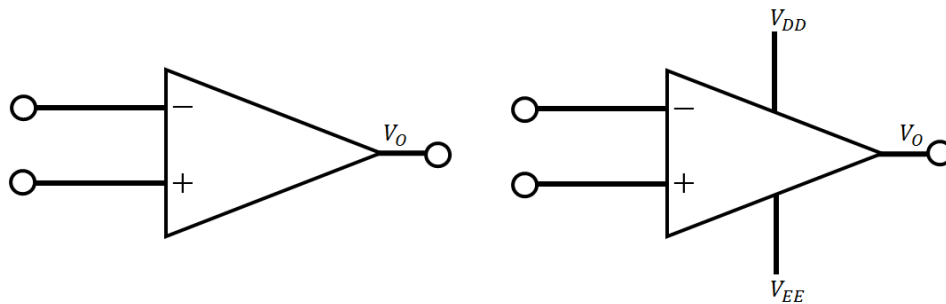


Figura A.1: *Izquierda*, Representación simbólica de un amplificador operacional. *Derecha*, Amplificador operacional con líneas de polarización .

En la *Fig. A.1 Derecha* se encuentra representado un amplificador operacional junto con sus líneas de polarización, una línea de polarización positiva representada con el nombre V_{DD} , y una línea de polarización negativa indicada con el nombre V_{EE} , las cuales alimentan al amplificador operacional permitiéndole tomar valores a la salida por encima, o debajo, del valor de entrada, generándose así una ganancia de tensión, que se encuentra definida como el cociente entre el voltaje de salida y el voltaje de entrada del operacional. De forma general, las líneas de polarización no son representadas de forma explícita cuando se hace uso de un operacional en un diseño electrónico, por lo que se asume que el integrado recibe los voltajes necesarios para su correcto funcionamiento.

El funcionamiento básico de un amplificador operacional es aquel en el cual su salida, V_O , es la diferencia entre dos entradas, multiplicadas por un factor de escalamiento A , donde la ganancia de salida, [98], se encuentra representada como:

$$V_O = A(V^+ - V^-) \quad (\text{A.1})$$

Como se puede observar en la *ecuación A.1*, el factor de escalamiento no se aplica de forma individual a las entradas que componen al operacional, si no que, dicho factor influye a la diferencia de las entradas. Si la entrada no inversora, V^+ , es de una magnitud mayor que la entrada inversora, V^- , la salida del sistema será positiva. Es importante señalar que en un amplificador operacional ésta ganancia A es extremadamente alta, por lo que al amplificador operacional se le considera como un amplificador, idealmente, de ganancia infinita.

La *ecuación A.1* representa el funcionamiento básico de los amplificadores operacionales, pero, es importante señalar que los valores típicos que toma la ganancia A , en operacionales reales, es decir, fuera del modelo idealizado, suelen ser mayores a 100,000, en escala lineal, o de 100 dB; éstos valores hacen del op-amp un componente cuyas características puedan ser de gran utilidad en diversas aplicaciones. Cabe destacar que la ganancia A de la *ecuación A.1* se encuentra calculada en lazo abierto, es decir, no existe ninguna retroalimentación entre la salida y la entrada del operacional. Ésta relación entre la entrada y la salida del AO se ilustra en la *Fig. A.2*, donde el eje horizontal representa la diferencia de los voltajes a la entrada del amplificador, $V^+ - V^-$, y el eje vertical indica el voltaje de salida, V_O .

En la *Fig. A.2*, el resultado de la *ecuación A.1* se ve representado por el segmento en el que la entrada se relaciona con el factor de escalamiento A , dicha zona de operación se le conoce como región lineal del operacional. Ésta relación posee cotas, tanto superior como inferior, las cuales se encuentran delimitadas por los voltajes de polarización del mismo operacional. Cuando el voltaje de salida alcanza al voltaje de polarización positivo, V_{DD} , ésta ya no puede tomar valores mayores a éste, llegando así a un estado de saturación, situación similar ocurre con voltajes negativos.

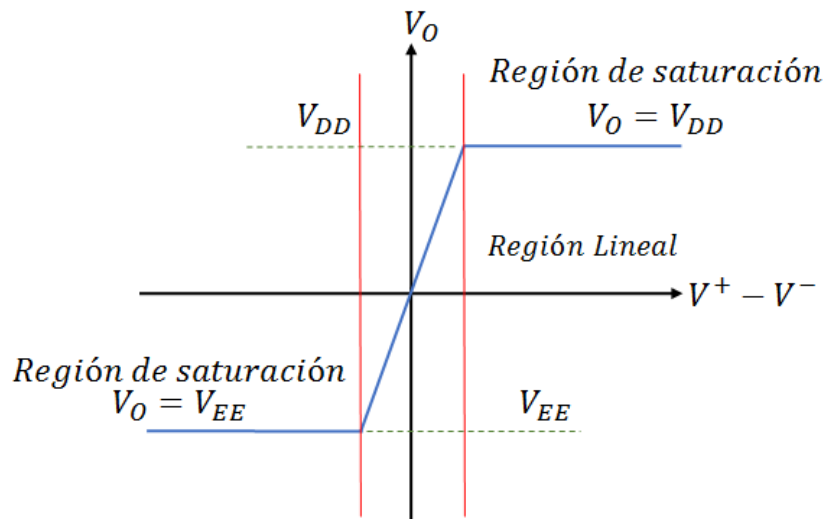


Figura A.2: Relación entrada-salida de un amplificador operacional.

A.2 Amplificador operacional ideal

Aunque en un principio los términos amplificador real y amplificador ideal puedan parecer contradictorios, no es lo que representa, si no que el modelo idealizado responde a la concepción teórica del funcionamiento del operacional en base a las necesidades con las que fué concebido, mientras que el real responde a las limitantes físicas con las que opera un integrado comercial.

El modelo ideal de un operacional permite estudiar el comportamiento del sistema y determinar la ganancia de éste, así como las resistencias que existen a su entrada y salida.

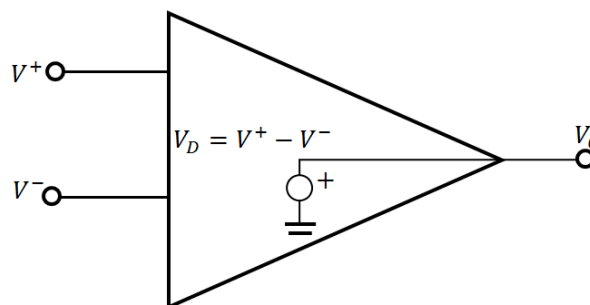


Figura A.3: Representación del modelo ideal de un op-amp.

Como se aprecia en la Fig. A.3, la salida del operacional proviene de una fuente de

voltaje ideal, la cual es controlada por las diferencias de voltaje a la entrada, *ecuación A.2*.

Teniendo ésto en cuenta, se pueden determinar algunas propiedades, adicionales a las ya mencionadas, que posee el amplificador operacional.

En la *Fig. A.3* se aprecia que, ambas entradas, tanto la inversora como la no inversora, se encuentran sin conexión; ésto indica que en el modelo ideal de un amplificador operacional, se considera a la impedancia de entrada como infinita. A su vez significa que no existe ninguna corriente de entrada que fluya entre las terminales del sistema, garantizándose así que no se modifique el valor del voltaje de entrada. La salida del AO se encuentra ligada a una fuente de voltaje ideal, en la que no existen impedancias de salida, ésto garantiza que sin importar la impedancia del circuito al que se conecte el voltaje de salida V_O , éste siempre se encuentra presente.

Otra característica rescatable desde el modelo ideal de un operacional es el funcionamiento de su respuesta, es decir, ésta sólo se ve definida en base a las diferencias de voltaje que se presentan a su entrada, a éste factor se le conoce como ganancia diferencial. Ésto significa que, sin importar los voltajes a la entrada, $V^+ = 4V$, $V^- = 3V$ o $V^+ = 14V$, $V^- = 13V$, el voltaje de salida será el mismo, $V_O = 1V$. Ésta respuesta está definida en base al modelo ideal. De forma más precisa, se puede definir la relación del funcionamiento del amplificador operacional en modo común, V_{MD} voltaje de modo común, lo que indicará una discrepancia en base al ejemplo planteado con las diferencias de voltaje, definiéndose de la siguiente forma

$$V_{MC} = \frac{1}{2} (V^+ + V^-) .$$

El voltaje de modo común representa la tensión asociada a ambas entradas, por eso es que se considera a la media de las mismas. Aunque el amplificador operacional no responde de acuerdo al voltaje en modo común, es importante conocerlo para comprender el correcto diseño del mismo; por ello se dice que el amplificador operacional posee una ganancia de modo común nula, simplificando el funcionamiento del mismo a una ganancia diferencial.

En la práctica, las propiedades ideales de un amplificador operacional no se alcanzan del todo, pero se aproximan en buena medida, no existe un AO ideal, como en su definición,

pero los operacionales reales se asemejan bastante a éste comportamiento, de ahí el gran interés y aplicaciones desarrolladas con éste tipo de tecnología.

A.3 Configuraciones de un operacional con elementos pasivos

En general, se puede hablar de tres elementos pasivos utilizados en la electrónica, las resistencias, los capacitores, o condensadores y las bobinas, o inductores, donde su funcionamiento depende de la naturaleza del circuito, configuración y tipo de voltaje con el que son alimentados. La utilización de elementos pasivos en circuitos basados en amplificadores operacionales genera una gran variedad de posibles combinaciones con diversas aplicaciones.

A.3.1 Amplificador Inversor

Una sencilla configuración de un amplificador operacional es la resultante de aplicar una retroalimentación negativa al sistema. Se denomina retroalimentación negativa dado que la señal de salida del operacional es enviada de vuelta a la entrada inversora del mismo. En la *Fig. A.4* se observa un op-amp con dos resistencias, R_1 , R_2 , donde la resistencia R_2 cumple la función descrita por la retroalimentación negativa, de manera que la salida del operacional se encuentra presente a la entrada del mismo, generando así un lazo cerrado de retroalimentación. Ésta configuración lleva el nombre de inversora, resultando así en un amplificador inversor, ésto se debe al funcionamiento del circuito, ya que la salida del sistema tendrá el signo contrario a la señal de entrada.

Cuando se retroalimenta a un operacional por medio de la terminal inversora, si dos voltajes de entrada en el amplificador operacional se desequilibran y dejan de ser iguales, la retroalimentación negativa compensa ésta diferencia y hace que las entradas tomen nuevamente el mismo valor entre sí; es decir, V^+ tiene el mismo valor que V^- , podemos decir que están “conectadas” sin estarlo, y ésto da lugar al llamado corto-circuito virtual.

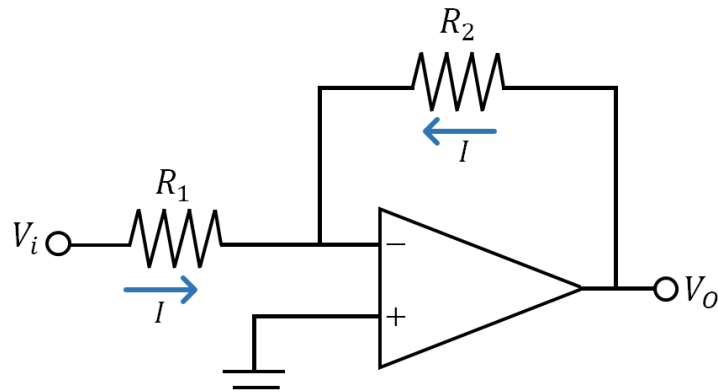


Figura A.4: Configuración de un op-amp en modo amplificador inversor.

Para conocer el valor de la salida en términos de la entrada, se debe realizar el análisis de mallas del circuito y así poder determinar la ganancia en lazo cerrado del mismo. Partiendo de que se trabaja con un amplificador ideal se tiene que $V^+ = V^-$. Aplicando el concepto de cortocircuito virtual al amplificador inversor de la figura anterior, como V^+ está conectado a tierra, se tiene que $V^- = 0$. A partir de esto y haciendo uso de la ley de Ohm se puede calcular la corriente que atraviesa R_1 .

$$I = \frac{V_i - V^-}{R_1} \quad (\text{A.2})$$

$$I = \frac{V_i}{R_1}.$$

Por otro lado, sabemos que el voltaje de salida tiene que ser la suma de lo existente en V^- sumado a la caída de tensión en R_2 , que depende de I :

$$V_O = V_{R_2} + V^-$$

$$V_O = -IR_2. \quad (\text{A.3})$$

igualando las expresiones obtenemos

$$\frac{V_i - 0}{R_1} + \frac{V_O - 0}{R_2} = 0$$

$$\frac{V_O - 0}{V_i} = -\frac{R_2}{R_1} \quad (\text{A.4})$$

$$G = -\frac{R_2}{R_1}.$$

Dado que la ganancia, G , se encuentra expresada únicamente por los valores de las resistencias que componen al arreglo, éste provee de una gran versatilidad al operacional ya que permite controlar la ganancia con la elección de los resistores adecuados, pudiendo tomar valores mayores, o menores, a la unidad.

A.3.2 Amplificador no Inversor

Cuando se requiere un amplificador de señales, pero dados los requisitos del diseño no se desea trabajar con el cambio de signo de un amplificador inversor, se puede recurrir a una configuración no inversora, la cual, al igual que en el amplificador inversor, posee una ganancia variable en función de sus componentes resistivos, *Fig. A.5*.

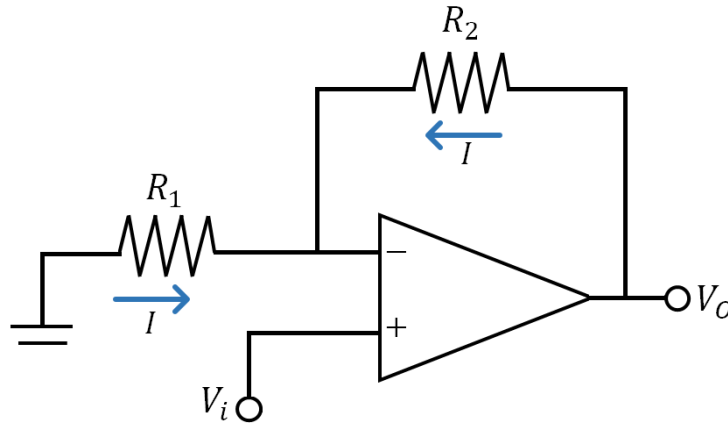


Figura A.5: Configuración de un op-amp en modo amplificador no inversor.

La ganancia del circuito mostrado en la figura anterior se puede obtener fácilmente sabiendo que $V^+ = V^- = V_i$, donde la corriente que atraviesa a R_1 es igual a:

$$I = \frac{V_1}{R_1} = \frac{V_i - 0}{R_1} = \frac{V_i}{R_1}, \quad (\text{A.5})$$

donde el voltaje de salida, V_O , estará definido como:

$$\begin{aligned} V_O &= IR_2 + V^- = IR_2 + V_i \\ V_O &= IR_2 + IR_1 = I(R_2 + R_1) \\ V_O &= \frac{V_i}{R_1}(R_1 + R_2), \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Entonces, la ganancia en lazo cerrado del amplificador no inversor se encuentra definida como:

$$\begin{aligned} G &= \frac{V_O}{V_i} = \frac{R_1 R_2}{R_1} \\ G &= 1 + \frac{R_2}{R_1}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Al usar un amplificador no inversor es de vital importancia tener en cuenta la ganancia del circuito, ya que éste siempre generará una amplificación de la señal de entrada en un factor mayor a la unidad, lo que no permite atenuar la señal en ningún factor de ganancia.

A.3.3 Amplificador Sumador Inversor

Un amplificador operacional, con retroalimentación negativa, también puede ser configurado como un sumador de voltajes, en el cual se pueden configurar n entradas de voltaje para obtener una salida igual a la sumatoria de cada una de ellas, *Fig. A.6*.

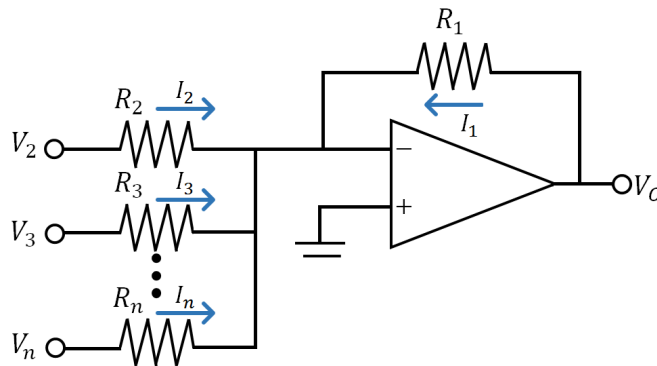


Figura A.6: Configuración de un op-amp en modo sumador inversor.

Dado que el voltaje en la terminal inversora es igual $V^- = 0$, las corrientes que circulan por cada una de las ramas del circuito son independientes entre sí, lo que significa que no existe una re-distribución de corrientes; lo que implica que la corriente total del sistema, I_T , que atraviesa por la resistencia de retroalimentación R_1 es igual a la suma de cada una de las corrientes I_j de cada una de las ramas de entrada:

$$\begin{aligned} I_j &= \frac{V_{ij}}{R_{ij}} \\ I_T &= \sum_{j=1}^n I_j, \end{aligned} \tag{A.8}$$

tomando esto en cuenta, la salida del amplificador sumador se puede definir como:

$$\begin{aligned} V_O &= -I_T R_2 \\ V_O &= -R_1 \left(\frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3} + \dots \frac{V_n}{R_n} \right). \end{aligned} \tag{A.9}$$

De ésta forma, el voltaje de salida es igual a la suma negativa, ponderada por el valor de cada una de las resistencias de entrada, de los voltajes de entrada. Éste diseño es equivalente a tener N amplificadores inversores, cada uno con una ganancia definida, que al final suman entre sí sus entradas.

A.3.4 Amplificador Derivador

Al igual que con el amplificador inversor o el amplificador sumador, el amplificador operacional puede ser implementado de tal forma que la respuesta en su salida sea proporcional a la derivada, con respecto al tiempo, de la entrada del sistema, siendo esto de gran utilidad en la electrónica de cálculo.

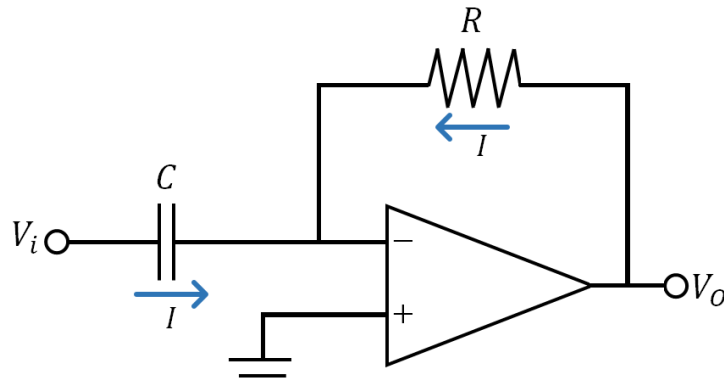


Figura A.7: Configuración de un op-amp como un amplificador derivador.

El análisis de mallas de éste circuito, *Fig. A.7* es muy similar al de un amplificador inversor, salvo que la corriente de entrada se encuentra definida por la corriente que atraviesa al capacitor. Tomando en cuenta que la carga almacenada por un capacitor se define como $Q = CV$, siendo C la capacitancia, pero, si el voltaje de entrada varía con respecto al tiempo, la carga del capacitor también lo hará, $Q = Q(t)$, resultando la tasa de cambio de forma:

$$\frac{dQ}{dt} = C \frac{dV}{dt}, \quad (\text{A.10})$$

y como la variación de la carga a lo largo del tiempo es igual a la corriente, se puede reformular la expresión anterior como:

$$I = C \frac{dV}{dt}. \quad (\text{A.11})$$

Asumiendo que el voltaje en el capacitor es igual al voltaje de entrada, se puede expresar el voltaje de salida del operacional como:

$$\begin{aligned} V_O &= -IR \\ V_O &= -RC \frac{dV_i}{dt}, \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

donde el voltaje de salida es proporcional a la derivada temporal del voltaje de entrada, donde, una vez más, los valores que definen la ganancia del circuito se definen únicamente por los valores nominales de los elementos seleccionados.

A.3.5 Amplificador Integrador

En sistemas computacionales, en ocasiones, es necesario realizar operaciones más complejas que una suma o resta de señales, por ejemplo, sistemas que respondan a la integral de una señal a lo largo del tiempo. Éste tipo de sistemas también es posible de ser implementados en base a amplificadores operacionales, resultando en una configuración como la mostrada en la Fig. A.8.

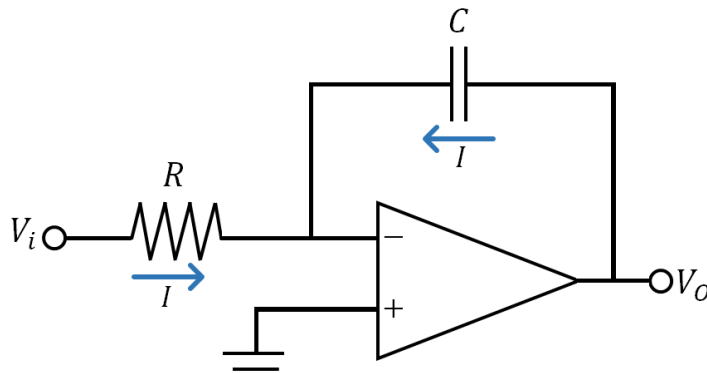


Figura A.8: Configuración de un op-amp en modo amplificador integrador.

En base a la configuración mostrada se tiene que el voltaje de salida es proporcional a la integral, con respecto del tiempo, de la señal de entrada. Ésto es posible de demostrar haciendo uso de la ecuación del circuito diferenciador, $I = C \frac{dV}{dt}$, donde el incremento en el voltaje del capacitor, V_c , es igual a la corriente multiplicada por el incremento en el tiempo, si la expresión anterior se divide con relación al valor del capacitor, resulta una expresión de la siguiente forma:

$$dV_c = \frac{1}{C} I dt, \quad (\text{A.13})$$

donde si se integran ambos lados de la igualdad resulta la ecuación siguiente:

$$V_c(t) = \frac{1}{C} \int I dt. \quad (\text{A.14})$$

Al ser igual la corriente que atraviesa tanto al capacitor como a la resistencia, podemos re-escribir la expresión anterior de la siguiente forma:

$$V_c(t) = \frac{1}{C} \int V_i(t) dt, \quad (\text{A.15})$$

donde, si se realiza, de forma virtual, un cortocircuito, el voltaje de salida V_O será igual que el voltaje en el capacitor, solamente con una diferencia en signo debido al flujo de la corriente por retroalimentación.

$$V_O = -V_c(t) = -\frac{1}{RC} \int V_i(t) dt. \quad (\text{A.16})$$

Ésta última ecuación indica que la señal de salida del amplificador operacional será proporcional a la integral de la señal de entrada. Si se asume que el voltaje de entrada $V_i t$ es constante con respecto al tiempo, dicho término saldría de la expresión, dejando la relación salida-entrada de la siguiente forma:

$$V_O = -\frac{1}{RC} \int V_i(t) dt. \quad (\text{A.17})$$

A.3.6 Comparador de Voltaje

Los comparadores de voltaje, también llamados detectores de voltaje o de nivel, son una clase especial en las posibles configuraciones de un amplificador operacional, en los que la salida del sistema proporciona información sobre el estado de la señal de entrada, el cual no se conoce, con respecto a un voltaje de referencia.

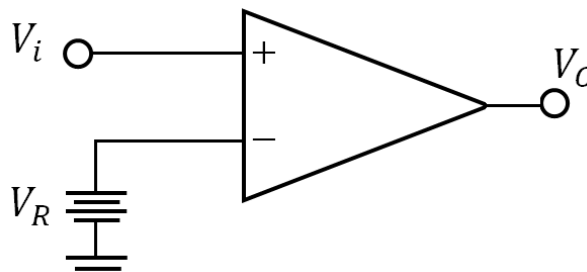


Figura A.9: Configuración de un op-amp en modo comparador de voltaje.

Al analizar el circuito mostrado en la *Fig. A.9*, V_R es un voltaje positivo aplicado a la señal inversora del operacional, el cual fungirá como voltaje de referencia, V_i es un voltaje

desconocido inyectado en la entrada no inversora del op-amp. Cuando el voltaje a comparar es menor que el voltaje de referencia, $V_i < V_R$, la salida del amplificador operacional se irá al límite de saturación negativa, $V_O = -V_{sat} \simeq V_{EE}$, en la medida en que V_i aumenta hasta ser mayor al voltaje de referencia, la salida del amplificador cambiará y se saturará a su nivel positivo, $V_i > V_R$, $V_O = +V_{sat} \simeq V_{DD}$.

$$\begin{aligned} V_i > V_R &\rightarrow V_O = +V_{sat} \simeq V_{DD} \\ V_i < V_R &\rightarrow V_O = -V_{sat} \simeq V_{EE} \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

A.3.7 Seguidor de Voltajes

Otra de las funciones que se pueden implementar con un amplificador operacional con retroalimentación negativa es la de un adaptador de impedancias, la cual consiste de un bloque de impedancia infinita a la entrada con una impedancia nula a la salida, esto garantiza el aislamiento de secciones en un diseño electrónico, eliminando así efectos de resistencias de carga. Ésta configuración, *Fig. A.10*, recibe el nombre de seguidor de voltajes, esto debido a que el voltaje de salida corresponde con el voltaje de entrada, $V_O = V_i$.

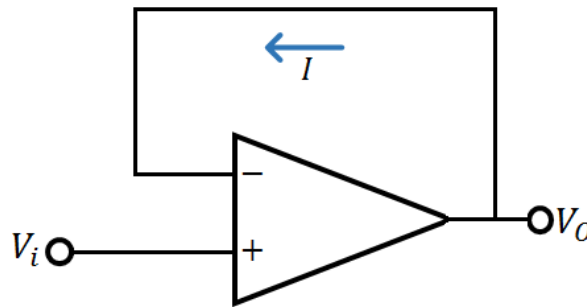


Figura A.10: Configuración de un op-amp como seguidor de voltaje.

B

Análisis de Fluctuaciones sin Tendencia

El Análisis de Fluctuaciones sin Tendencia, o DFA por sus siglas en inglés, Detrended Fluctuation Analysis, es un método de análisis de escalamiento utilizado para estimar correlaciones temporales de largo alcance en forma de una ley de potencias. En otras palabras, si una secuencia de eventos tiene una estructura temporal no aleatoria con un decaimiento lento en sus correlaciones, el DFA es capaz de cuantificar que tan lentamente se modifican éstas correlaciones, mientras que asigna un índice a la ley de potencias generada. El método fué propuesto por primera vez por C.K. Peng en 1994 [94], donde hace uso de éste tipo de análisis para identificar tendencias en cadenas de ADN, sin conocer la forma u origen de las mismas.

Las clases típicas de correlaciones que se ven reflejadas con el exponente ϑ , son los siguientes:

- Si $\vartheta = 0.5$, se dice que la serie temporal no presenta correlaciones, ruido blanco.

- Si $0 < \vartheta < 0.5$, la serie temporal se encuentra anti-correlacionada.
- Si $0.5 < \vartheta < 1$, existen correlaciones positivas, de largo alcance, en la serie sometida a estudio.
- Si $\vartheta = 1$, la señal corresponde a un proceso del tipo $\frac{1}{f}$, ruido rosa.
- Si $\vartheta \sim 1.5$, la señal presenta comportamiento de tipo Browniano, ruido café.

El interés en el análisis de correlaciones temporales de largo alcance, se basa en los resultados del modelo que indica que la dinámica de los sistemas de unidades múltiples de auto-organización se caracterizan por presentar fluctuaciones que tienden a aparecer en un cierto orden temporal, así como su correspondiente exponente de la ley de potencias que describe dicho comportamiento. El hecho de que un sistema posea una auto-organización significa que, a excepción de algunas unidades estocásticas de baja velocidad, la mayoría de las fluctuaciones son endógenas, en lugar de ser determinadas por variables externas al sistema.

El fundamento físico para explicar el fenómeno de las autocorrelaciones temporales que persisten a diferentes escalas de tiempo, es decir, que tienen una larga duración temporal, radica en el hecho de que las actividades propias del sistema, dinámica natural, realiza cambios estructurales internos en el mismo sistema, lo que provoca un sesgo de preferencia en la aparición de eventos futuros. En otras palabras se puede entender como el comportamiento del flujo de agua que atraviesa una montaña y desemboca en una serie de ríos, dicho flujo siempre es cambiante a lo largo de las estaciones del año, pero a su vez es lo suficientemente estable como para no interrumpirse. De manera formal, las estructuras dinámicas en sistemas complejos de auto-organización son el sustrato de la memoria del sistema, mismo que asegura cierto grado de correlación en la dinámica a lo largo del tiempo.

El proceso para el cálculo del exponente de DFA se resume en los pasos descritos a continuación:

Sea una serie temporal $X(t)$, $t = 1, 2, 3, \dots, N$, $N > 1000$, con un Δt en el proceso de muestreo

- 1.- Se calcula la media de la serie temporal de la forma:

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y(j). \quad (\text{B.1})$$

- 2.- Se integra la serie temporal, $X(t)$, $t = 1, 2, 3, \dots, N$, en la forma:

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^N [x(j) - (\bar{y})]. \quad (\text{B.2})$$

3.- Se selecciona la serie temporal integrada, $\bar{x}$, en cajas de igual tamaño, n , la cual corresponde a una escala de tiempo $\tau = n\Delta t$. Una vez segmentada la serie temporal, se ajusta un polinomio de grado m , denotado como $\bar{x}_{poli,m}(j; \tau)$, que se usa para interpolar los datos contenidos en cada caja, dicha interpolación representa la tendencia local de la serie integrada.

4.- Se calcula la secuencia de fluctuación, la cual se encuentra formada por las tendencias locales encontradas para un tamaño de caja.

$$y_n(j; \tau) = \bar{x}(j) - \bar{x}_{poli,m}(j; \tau), \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (\text{B.3})$$

Usualmente se hace uso de un ajuste lineal, $m = 1$, debido a que el elevar el grado del polinomio no representa una modificación significativa en el exponente final encontrado, [100].

5.- Se calcula la función de fluctuación $F(n)$ como la media del cuadrado de la raíz de la secuencia de fluctuación.

$$F(n) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y_n(j; \tau)}. \quad (\text{B.4})$$

6.- Se repite el proceso descrito en los pasos anteriores para cierta cantidad de tamaños de caja a explorar. De acuerdo a las recomendaciones reportadas en la literatura [94, 100], los rangos de valores válidos para el tamaño de caja están dados como:

$$n_{min} \simeq 5, n_{max} \simeq \frac{N}{4}.$$

El exponente relacionado se encontrará dado por la relación $F(n) \sim n\tau^\vartheta$.

Una relación lineal en un gráfico $\log - \log$ indica la presencia de una ley de escalamiento, bajo dicha condición las fluctuaciones pueden ser caracterizadas mediante una escala exponencial, la pendiente de la línea recta que relaciona $\log(F(n))$ vs $\log(n)$.

La aplicación del método de fluctuaciones sin tendencia ha sido ampliamente utilizado para el estudio de correlaciones de largo alcance, como en el estudio de estructuras de ADN, en la dinámica de los latidos de un corazón enfermo contra los de un corazón saludable, interacciones neuronales, cambios en la temperatura atmosférica, variables de inventario, análisis de sistemas caóticos, entre otros.

Ejemplo de la aplicación de este método se puede dar con el análisis de DFA para una serie temporal del sistema de Lorenz en estado caótico, con parámetros de control $\sigma = 16.0$, $r = 45.492$, $b = 4$, resultando un gráfico como el mostrado a continuación, *Fig. B.1*.

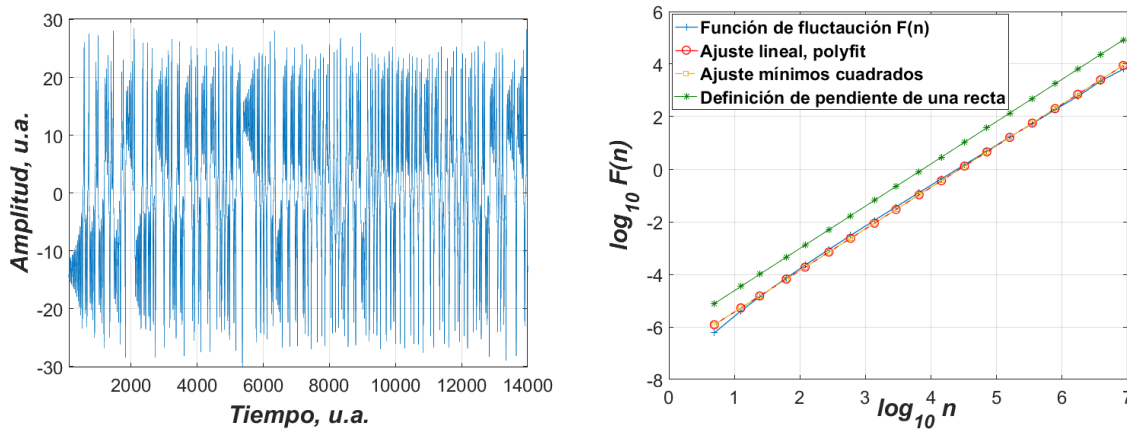


Figura B.1: *Izquierda.* Serie temporal del sistema de Lorenz generada en MatLab, *Derecha.* Análisis de DFA para serie temporal del sistema Lorenz.

Una vez realizado el análisis de DFA a una serie temporal conocida, se realizan tres aproximaciones para encontrar la pendiente característica de la recta, además de calcular su coeficiente de correlación para determinar la mejor aproximación a éste. En la *Fig. B.1 Derecha* podemos observar la construcción de las diferentes rectas de aproximación, las

cuales arrojan los siguientes valores tanto en pendiente de recta m , como en su coeficiente de correlación, c , así como su coeficiente de determinación r^2 .

- Haciendo uso de la función *polyfit* de MatLab, la cual aproxima un polinomio de grado n por medio de mínimos cuadrados, siendo en éste caso $n = 1$ para la generación de una aproximación lineal, se obtiene una pendiente de la recta $m = 1.5814$, misma que tiene un coeficiente de correlación de Pearson, con respecto a la función de fluctuación, igual a $c = 0.9994$ y un factor de determinación $r^2 = 0.9988$.
- Mediante la aplicación del método de mínimos cuadrados para la aproximación de una recta de mejor ajuste, definida como:

$$m = \frac{\sum xy - \frac{(\sum x)(\sum y)}{n}}{\sum(x^2) - \frac{(\sum x)^2}{n}}, \quad (\text{B.5})$$

se obtiene un valor de pendiente $m = 1.5814$ con su correspondiente coeficiente de correlación, con respecto a la función de fluctuación, igual a $c = 0.9994$, así como un coeficiente de determinación $r^2 = 0.9988$.

- Utilizando la definición de pendiente de una recta, descrita como:

$$m = \frac{y(2) - y(1)}{x(2) - x(1)}, \quad (\text{B.6})$$

se obtiene un valor en la pendiente igual a $m = 1.6083$, con un coeficiente de correlación $c = 0.9994$ y un coeficiente de determinación $r^2 = 0.9102$.

Los resultados descritos muestran un exponente en ley de potencias que, dependiendo el método utilizado para su cálculo, oscila entre el 1.58 y el 1.60, con coeficientes de correlación y determinación cercanos entre sí. Para evitar discrepancias generadas por el método seleccionado para el cálculo del exponente en el análisis de fluctuaciones sin tendencia, se analizan series temporales numéricas, generadas en base a una distribución de probabilidad Normal, las cuales varían en tamaño, ésto para analizar dos factores que pudieran afectar los resultados, i) ¿El tamaño de la serie temporal analizada influye en la obtención del exponente característico?, y ii) ¿El método sobre el cual se obtiene el exponente

buscado genera algún tipo de sesgo que influya en los resultados finales? Los resultados derivados de dicho análisis se resumen en la *Fig. B.2*.

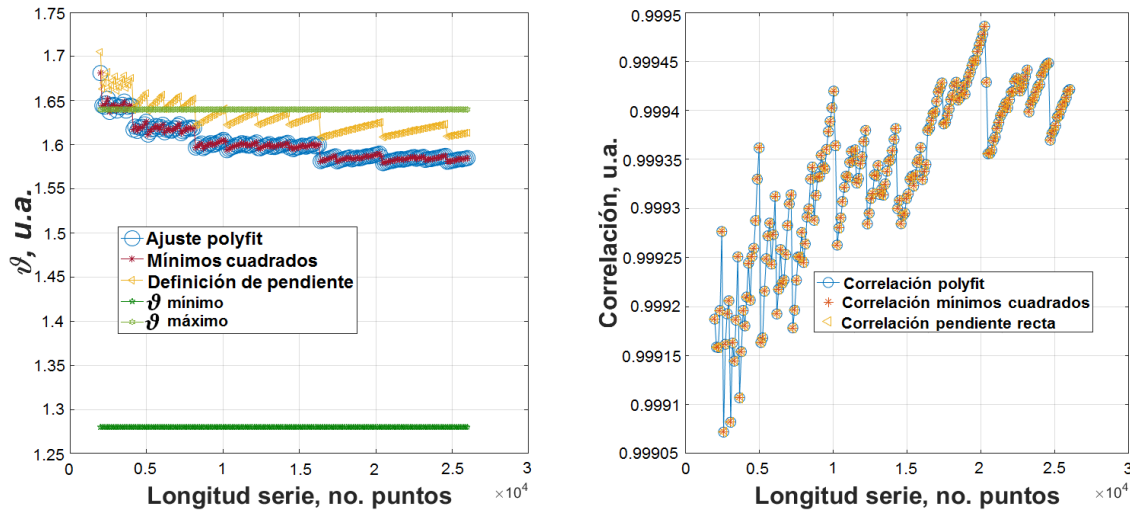


Figura B.2: *Izquierda.* Curvas de exponente ϑ para diferentes aproximaciones lineales, *Derecha.* Curvas de correlación para las diferentes aproximaciones.

Los resultados mostrados en la *Fig. B.2* indican que, para series temporales con una longitud mayor a los cinco mil puntos, los resultados son constantes y consistentes con lo esperado para series temporales de ésta naturaleza, donde el método sobre el cual es calculado el exponente, no resulta en un factor dominante dado que los resultados terminan siendo consistentes entre sí, sin importar el método sobre el cual se calculó la pendiente de la recta analizada.

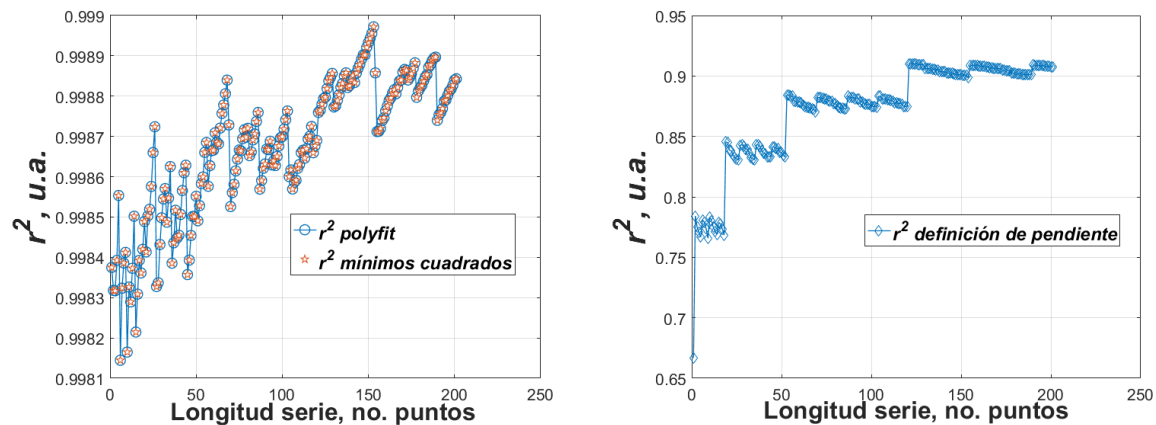


Figura B.3: Izquierda. Curvas del coeficiente de aproximación r^2 para un ajuste lineal por función *polyfit* y por mínimos cuadrados, **Derecha.** Curva del coeficiente de aproximación r^2 para ajuste lineal por definición de pendiente.

En contraste con lo mostrado en la Fig. B.2, el coeficiente de determinación tanto para el ajuste lineal por medio de la función *polyfit* como para el ajuste realizado por medio de mínimos cuadrados, Fig. B.3 Izquierda, se comportan de manera similar entre sí y poseen cierta correspondencia con su coeficiente de correlación, caso contrario a lo mostrado por el coeficiente de determinación del ajuste realizado por medio de la definición de pendiente de una recta, el cual es significativamente más bajo tanto en comparación a los otros dos métodos empleados como con su coeficiente de correlación.

B.1 Coeficiente de Determinación r^2

En estadística, el coeficiente de determinación, denominado r^2 [101], es un estadístico que determina la calidad de un modelo para replicar resultados y la proporción de variación de los resultados obtenidos contra el modelo original. La exactitud de la predicción depende de la relación que existe entre las variables a analizar. Si dos variables no covarían entre sí, no se pueden realizar predicciones válidas, en cambio si las predicciones covarían de forma moderada, las predicciones realizadas no resultan del todo confiables. En consecuencia, se debe disponer de alguna medida que sea capaz de cuantificar el error entre las predicciones realizadas a un modelo y el modelo en sí, esta medida resulta ser el coeficiente de determinación, definido como el cuadrado del coeficiente de correlación de Pearson, el cual proporciona la variación del modelo estimado contra el modelo analizado. Si dicho coeficiente es nulo, se dice que la variable predecida no posee capacidad predictiva sobre el modelo, en la medida que este factor aumente, la predicción realizada resulta más exacta, teniendo valores entre cero y la unidad.

$$r^2 = \frac{SCR_{eg}}{SCT} = 1 - \frac{SCE}{SCT}, \quad (B.7)$$

donde:

SCR_{eg} = Suma de Cuadrados de la regresión $\sum((\hat{y}_i - \bar{y}))^2$.

SCT = Suma de Cuadrados Total $\sum((y_i - \bar{y}))^2$.

SCE = Suma de Cuadrados Residual $\sum((y_i - \hat{y}_i))^2$.

C

Ley de escalamiento entre frecuencia e intensidad del espectro de potencia

Una ley potencial, ley de potencias o ley de escalas, es un tipo de relación matemática entre dos magnitudes cualquiera, ésta relación se encuentra definida en base a un cambio relativo en una de las magnitudes, lo que dará pie a un cambio proporcional en la segunda magnitud, el cual será independiente a la escala de dichas magnitudes [102]. Una ley potencial puede ser transformada en una relación lineal si las variables estudiadas son representadas en un gráfico doble logarítmico, usualmente ésta es la forma como se demuestra si dos magnitudes poseen una relación generada por una ley de potencias. Las leyes de potencias resultan de gran importancia debido a que son capaces de revelar ciertas regularidades en el comportamiento y propiedades del sistema analizado.

Un proceso físico responde a una ley potencial cuando la probabilidad de que ocurra un evento decae de forma potencial con respecto a cierta magnitud, es decir, sigue un

comportamiento descrito por $F(c) = x^k$, donde x es una variable medida de un sistema elevada a una potencia k . En la naturaleza existen muchos fenómenos que siguen leyes potenciales, ejemplo de ésto es el comportamiento de los terremotos, si se gráfica el número de terremotos ocurridos en función de la energía que cada uno de estos libera, se obtiene un gráfico como el mostrado en la *Fig. C.1*.

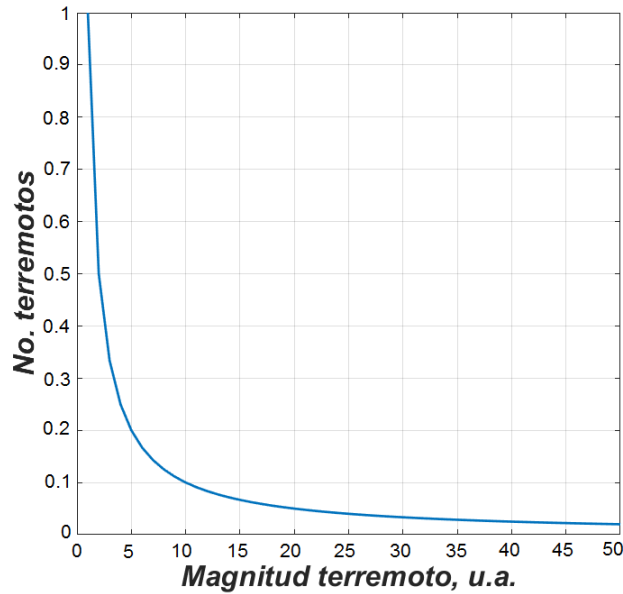


Figura C.1: Ley potencial entre la magnitud de un terremoto y la cantidad de eventos.

A la izquierda de la *Fig. C.1* se tiene que una gran cantidad de terremotos que presentan baja intensidad, pero a la derecha se ubica una cantidad pequeña de eventos con una gran magnitud; ésto, en esencia, es una ley potencial.

La transformada de Fourier, denominada así por Joseph Fourier [103, 104], es una transformación matemática empleada para, valga la redundancia, transformar señales entre el dominio temporal y el dominio frecuencial, siendo reversible, es decir; es posible transformar en cualquiera de los dos sentidos, tiempo-frecuencia o frecuencia-tiempo. El fundamento de ésta transformada se basa en la siguiente idea, debido a que la evolución temporal de cualquier sistema se representa por medio de una función de variaciones en relación al tiempo, una serie temporal $f(t)$, la cual es continua y periódica, $f(t) = f(t + nT)$, siendo n un entero, positivo o negativo, y T el período fundamental de la serie temporal, ésta

puede ser expresada como una combinación lineal de oscilaciones, cuyas frecuencias son múltiplos enteros de una frecuencia básica, ω_0 , de la forma:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\omega_0 t}, \quad (\text{C.1})$$

la *ecuación C.1* representa la serie de Fourier, donde a_n es una constante definida como:

$$a_n = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt. \quad (\text{C.2})$$

La transformación de la serie de Fourier da como resultado la transformada de Fourier, misma que se define como:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a_n(\omega) d\omega e^{i\omega t}, \quad (\text{C.3})$$

donde, nuevamente, a_n es una función constante definida:

$$a_n = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-in\omega_0 t} d\omega. \quad (\text{C.4})$$

La cual, si se transforma, resulta en una expresión de la forma:

$$a_n(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega_0 t} dt. \quad (\text{C.5})$$

Sustituyendo el resultado en la *ecuación C.3*, resulta una expresión de la siguiente manera:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a_n(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (\text{C.6})$$

Debido a que la transformada de Fourier puede contener componentes complejas, ésta suele ser representada en su valor real:

$$S(\omega) = |a_n(\omega)|^2. \quad (C.7)$$

La *ecuación C.7* es llamada espectro de potencia, la cual posee grandes aplicaciones en la física e ingeniería, permitiendo estudiar las diferentes componentes en frecuencia que conforman a una señal.

Haciendo uso de las ecuaciones anteriores, se puede calcular el espectro de potencias de una serie temporal del sistema de Lorenz en estado caótico, con parámetros de control $\sigma = 16.0$, $r = 45.492$, $b = 4$, resultando en un gráfico como el mostrado a continuación:

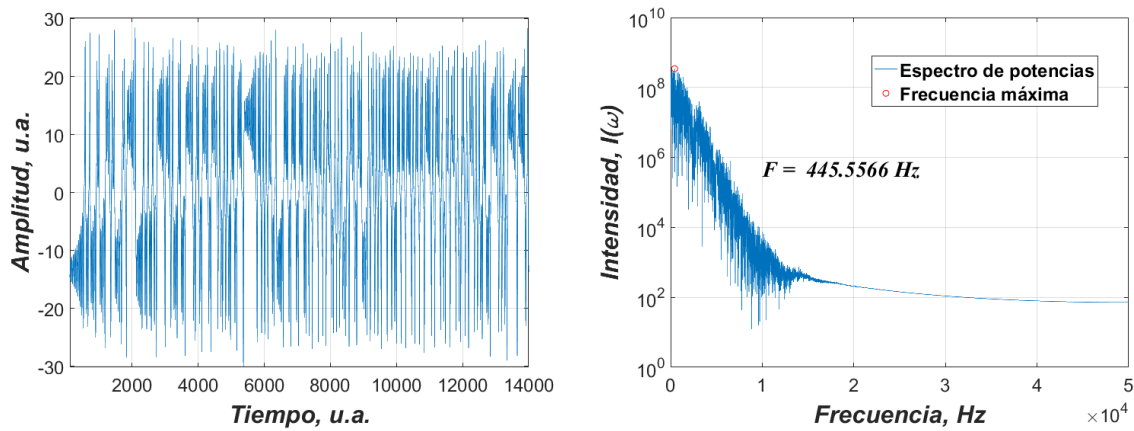


Figura C.2: Izquierda. Serie temporal del sistema de Lorenz generada en MatLab, Derecha. Espectro de potencias de la serie temporal del sistema de Lorenz.

Como el nombre del método lo indica, el objetivo radica en encontrar leyes potenciales en el espectro de frecuencias de una serie de observaciones, o series temporales. Ésta ley de potencias se representa por la relación $I(\omega) \sim \omega^\rho$, siendo $I(\omega)$ la intensidad espectral de la componente frecuencial ω , del espectro de potencias de la serie temporal analizada. Tomando como referencia a la función seno, mostrada en la figura anterior, se aplica el método descrito en búsqueda de una ley potencial existente en su espectro de potencias, resultando en el gráfico mostrado en la *Fig. C.3*.

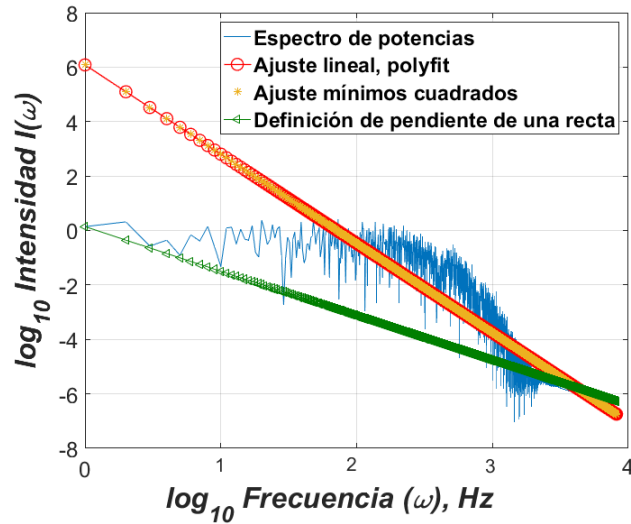


Figura C.3: Análisis en búsqueda de ley potencial en el espectro de potencias de la serie temporal del sistema de Lorenz.

Una vez realizado el análisis a la serie temporal, se realizan tres aproximaciones para encontrar la pendiente característica de la recta, además que es calculado su coeficiente de correlación y así determinar la mejor aproximación a éste. En la *Fig. C.3* podemos observar la construcción de las diferentes rectas de aproximación con respecto al espectro de potencias, las cuales arrojan los siguientes valores tanto en pendiente de recta m , como en su coeficiente de correlación de Pearson, c , así como su coeficiente de determinación r^2 .

- Haciendo uso de la función *polyfit* de MatLab, que aproxima un polinomio de grado n por medio de mínimos cuadrados, siendo en éste caso $n = 1$ para la generación de una aproximación lineal, se obtiene una pendiente de la recta $m = -3.2778$, misma que tiene un coeficiente de correlación, con respecto al espectro de potencias, $c = 0.9292$ y un coeficiente de determinación $r^2 = 0.8633$.
- Mediante la aplicación del método de mínimos cuadrados para la aproximación de una recta de mejor ajuste, definida como:

$$m = \frac{\sum xy - \frac{(\sum x)(\sum y)}{n}}{\sum (x^2) - \frac{(\sum x)^2}{n}}, \quad (\text{C.8})$$

se obtiene un valor de pendiente $m = -3.2778$ con su correspondiente coeficiente de correlación igual a $c = 0.9292$ así como un coeficiente de determinación $r^2 = 0.8633$.

- Utilizando la definición de pendiente de una recta, descrita como:

$$m = \frac{y(2) - y(1)}{x(2) - x(1)}, \quad (\text{C.9})$$

se obtiene un valor en la pendiente igual a: $m = -1.6393$, con un coeficiente de correlación: $c = 0.7292$ y su correspondiente coeficiente de determinación $r^2 = 0.6230$.

Los resultados descritos muestran un exponente en ley de potencias que, dependiendo el método utilizado para su cálculo, oscila entre el -3.27 y el -1.63 , con coeficientes de correlación no tan cercanos entre sí. Para evitar discrepancias generadas por el método seleccionado para el cálculo del exponente de la ley de potencias, se analizan series temporales numéricas, generadas en base a una distribución de probabilidad Normal, mismas que varían en tamaño, esto para analizar dos factores que pudieran afectar los resultados, i) ¿El tamaño de la serie temporal analizada influye en la obtención de la ley potencial correspondiente?, y ii) ¿El método sobre el cual se obtiene el exponente buscado genera algún tipo de sesgo que influya en los resultados finales? Los resultados derivados de dicho análisis se resumen en el gráfico de la *Fig. C.4*.

Los resultados mostrados en la *Fig. C.4* indican que, parece no importar el tamaño de la serie temporal para obtener su exponente en ley de potencias, pero, sí influye el método sobre el cual éste se obtiene, ya que, aunque tanto la correlación obtenida entre las tres aproximaciones realizadas contra el espectro de las series *Fig. C.4 Derecha*, como el coeficiente de determinación *Fig. C.5 Derecha*, se comportan de forma similar, el valor de su pendiente se mantiene constante al realizar la aproximación por medio del método de mínimos cuadrados, ya sea por medio de la función embebida en MatLab o en base a su definición, caso contrario a los resultados obtenidos en base a la definición de pendiente de una recta, *Fig. C.5 Izquierda*, los cuales sí poseen variaciones significativas con los resultados esperados para series temporales de ésta naturaleza, lo que, junto con lo mostrado en el *Apéndice B*, valida al método de mínimos cuadrados como el óptimo para la obtención de las pendientes correspondientes.

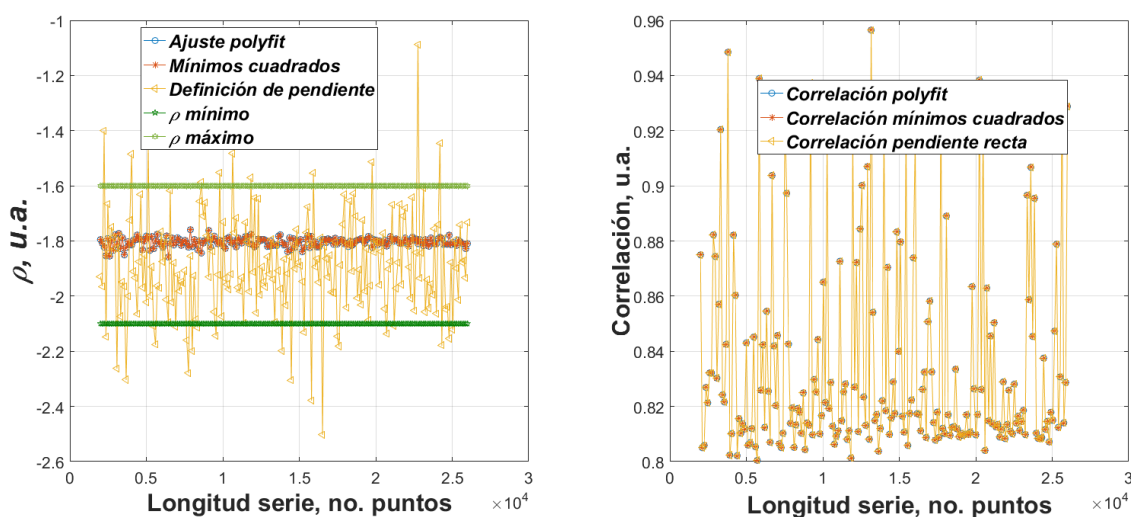


Figura C.4: *Izquierda*. Curvas de exponente ρ para diferentes aproximaciones lineales, *Derecha*. Curvas de correlación para las diferentes aproximaciones.

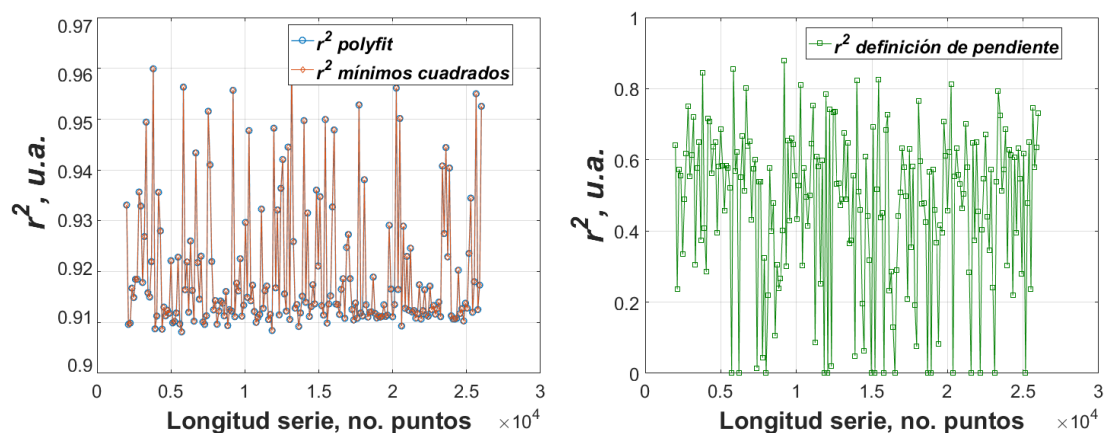


Figura C.5: *Izquierda*. Curvas del coeficiente de aproximación r^2 para un ajuste lineal por función *polyfit* y por mínimos cuadrados, *Derecha*. Curva del coeficiente de aproximación r^2 para ajuste lineal por definición de pendiente.

D

Distribución de Probabilidad Normal

La distribución de tipo Normal fué reconocida por primera vez por el francés Abraham Moivre, posteriormente Carl Gauss profundizó en su estudio generando la ecuación de la curva Normal, también conocida como campana de Gauss [97, 105]. La distribución de una variable Normal se determina en base a dos parámetros, su media, usualmente representada como μ , y la desviación estándar, σ , tomando ésto como referencia la densidad de una curva Normal se encuentra dada como la *ecuación D.1*, con lo que es posible generar la característica campana de Gauss, *Fig. D.1*.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}; \quad -\infty < x < +\infty. \quad (\text{D.1})$$

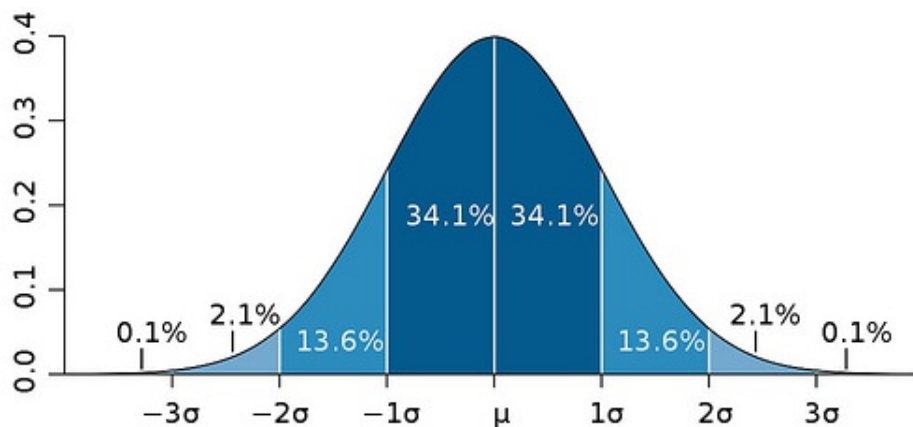


Figura D.1: Curva característica de una distribución Normal, campana de Gauss.

De forma similar a lo que se observa en un histograma, el área de cada rectángulo que conforma la *Fig. D.1* es proporcional al número de datos comprendidos en el rango de valores correspondiente. Debido a que la campana de Gauss alcanza su mayor valor en torno a la media de los datos, y las curvas se extienden asintóticamente en el eje horizontal, cuando una variable siga una distribución de tipo Normal será mucho más probable observar un dato cercano al valor medio que uno que se encuentre alejado de éste.

La distribución Normal posee ciertas características, enlistadas a continuación:

- La distribución Normal tiene una moda única, la cual coincide con su media y su mediana.
- La curva Normal es asintótica al eje de las abscisas, de ahí que cualquier valor comprendido de $-\infty$ a ∞ sea probable. El área total bajo la curva es igual a la unidad.
- La curva de distribución Normal es simétrica a su media, μ , lo que indica que cualquier valor, mayor o menor a ésta, tiene un 50 % de aparecer.
- La distancia entre la línea trazada en la media y el punto de inflexión de la curva es igual a la desviación estándar, σ , cuanto mayor sea éste valor, más aplanada será la curva.
- El área bajo la curva comprendida entre los valores situados, aproximadamente a dos desviaciones estándar de la media es igual a 0.95, es decir, existe un 95 % de probabilidad de observar un valor comprendido en el intervalo $\mu - 1.96\sigma$; $\mu + 1.96\sigma$.

- La forma de la campana de Gauss depende de los parámetros μ y σ , por lo que no existe una única distribución Normal, sino una familia de distribuciones con una forma común, diferenciadas tanto por su media como por su desviación estándar.

Los gráficos de probabilidad Normal constituyen una importante herramienta gráfica para comprobar si un conjunto de datos puede considerarse, o no, procedente de una distribución Normal. La idea básica consiste en enfrentar, en un mismo gráfico, los datos que han sido observados frente a los datos teóricos que se obtendrían de una distribución Gaussiana. Si la distribución de la variable coincide con la Normal, los puntos se concentrarán en torno a una línea recta, aunque conviene tener en cuenta que siempre tenderá a observarse mayor variabilidad en los extremos.

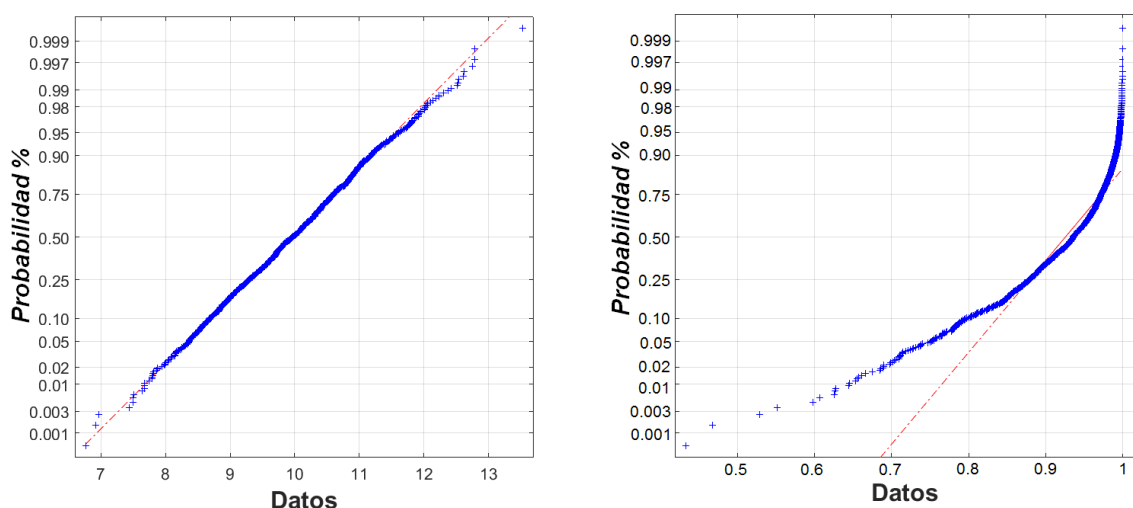


Figura D.2: *Izquierda.* Gráfico de probabilidad Normal para una serie temporal con distribución Normal, *Derecha.* Gráfico de probabilidad Normal para una serie temporal con distribución Beta.

En la *Fig. D.2 Izquierda* se aprecia un ejemplo del gráfico Normal, en el cual se hace uso de una serie temporal generada con distribución Normal, donde los datos generados por la serie temporal, puntos azules, se ajustan a una línea recta de color rojo sólido, la cual no se observa por la superposición de datos, indicando la presencia de normalidad en los datos analizados, caso opuesto al mostrado en la *Fig. D.2 Derecha*, donde se analiza una serie temporal con distribución Beta, la cual no se ajusta a la línea recta esperada por una distribución de tipo Normal.

E

Desplazamiento cuadrático medio

Sea una partícula poseedora de comportamiento de tipo Browniano, donde cada modificación en su posición puede ser tanto hacia adelante o hacia atrás, los cuales no pueden ser predecibles y tienen la misma probabilidad de ocurrir. Si se desea conocer la distancia recorrida por la partícula, tomando un punto conocido como referencia, punto de inicio, bastaría con realizar la sumatoria de las distancias recorridas en cada instante de tiempo, pero, como un movimiento hacia adelante suma al recorrido y uno hacia atrás merma al mismo, y debido a que ambos eventos poseen la misma probabilidad de ocurrir, la distancia obtenida al final sería nula. Es por eso que Einstein [20, 95], definió la distancia recorrida por una partícula con comportamiento aleatorio como el cuadrado del trayecto de la partícula en cada instante de tiempo, generándo así una sumatoria de elementos positivos los cuales permiten cuantificar el trayecto realizado por la partícula sometida a estudio. La fórmula que describe dicha medida, desplazamiento cuadrático medio ó MSD por sus siglas en inglés, se puede representar de la siguiente forma, *ecuación E.1*, donde $x(t)$ es cada uno de los

cambios de dirección de la partícula, $x(0)$ es el punto de inicio que se toma como referencia.

$$MSD = \overline{\Delta x^2} = \langle (x(t) - x(0))^2 \rangle. \quad (E.1)$$

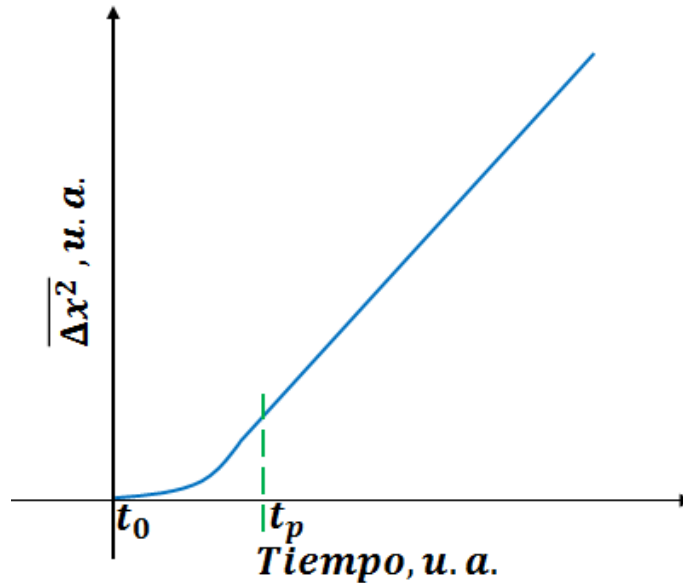


Figura E.1: Curva de comportamiento del MSD descrita por Einstein.

Los resultados de Einstein muestran una curva de comportamiento como la mostrada en la *Fig. E.1*, misma que se compone de dos secciones, la primera de ellas, en el intervalo $[t_0 - t_p]$, se aproxima a una parábola, pero para valores mayores a t_p el desplazamiento cuadrático medio responde a una línea recta a lo largo del tiempo. La razón por la que la curva se comporta de dicha manera, según Einstein, se basa en que, durante un periodo transitorio, parábola de la curva, la partícula estudiada se comporta como una partícula libre, la cual posee muy poca, o nula, interacción con el medio en el que se encuentra, pero a medida que éstas interacciones aumentan en base al número de colisiones que siente la partícula, el valor del MSD responde a una línea recta.

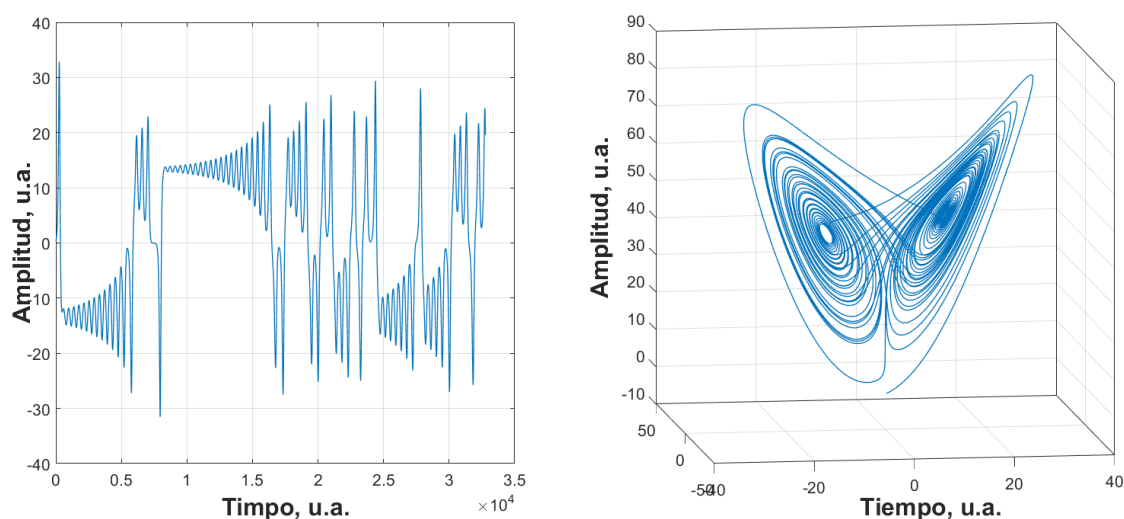


Figura E.2: *Izquierda.* Serie temporal del sistema dinámico Lorenz con parámetros de control $\sigma = 16.0$, $r = 45.92$, $b = 4$. *Derecha.* Atractor caótico del sistema de Lorenz.

Como punto de comparación del comportamiento del desplazamiento cuadrático medio, se analiza la respuesta del sistema de Lorenz, *Fig. E.2*, donde a partir de la serie temporal de la variable x se analiza el comportamiento de ésta. Se analizan dos casos, el comportamiento del desplazamiento cuadrático medio de la partícula con respecto al origen y el comportamiento de la trayectoria con respecto al punto anterior, es decir, como se comporta la partícula a cada instante de tiempo, resultando en lo mostrado por la *Fig. E.3*

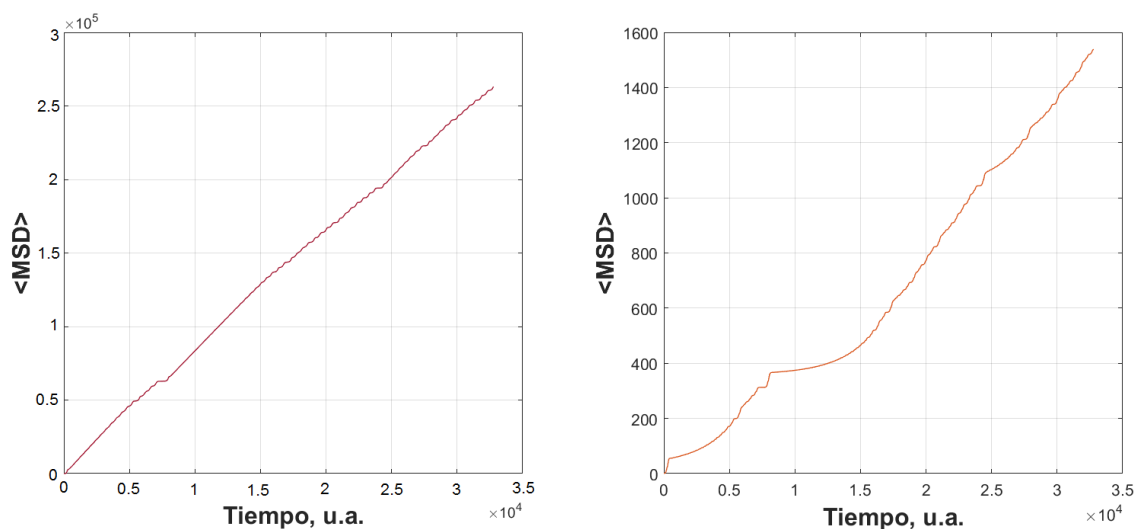


Figura E.3: *Izquierda.* Comportamiento del MSD del sistema de Lorenz con respecto al origen. *Derecha.* Comportamiento del MSD del sistema de Lorenz con respecto al punto anterior.

En ninguno de los casos mostrados en la *Fig. E.3* corresponden a lo mostrado en la *Fig. E.1*, indicando que el sistema dinámico de Lorenz no presenta un desplazamiento cuadrático medio propio de una variable aleatoria. Caso contrario a lo que sucede al analizar una serie temporal con distribución Normal, *Fig. 4.7*, generando un gráfico de comportamiento en MSD como el mostrado en la *Fig. E.4*.

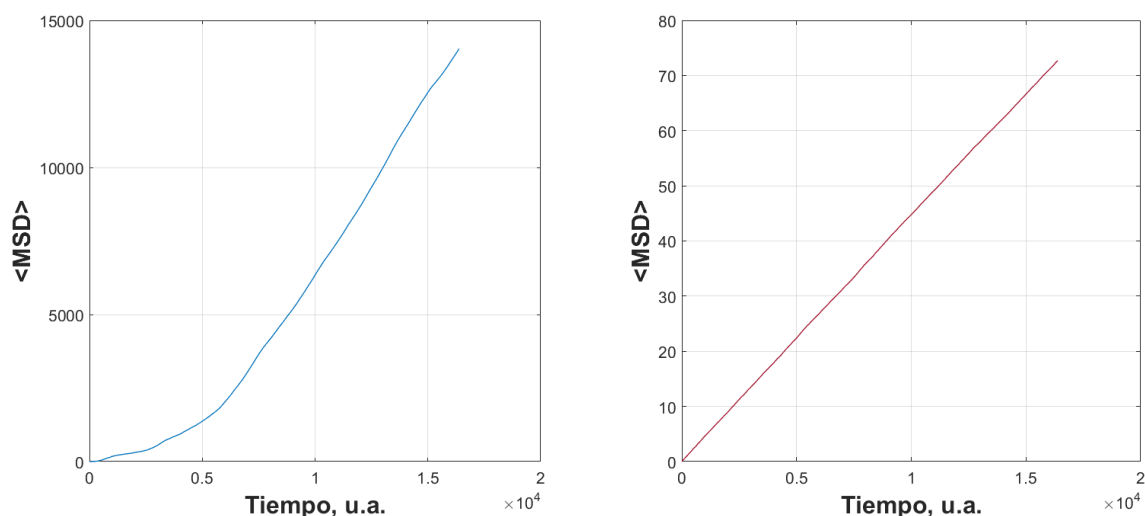


Figura E.4: *Izquierda.* Comportamiento del MSD de una serie temporal Normal con respecto al origen. *Derecha.* Comportamiento del MSD de una serie temporal Normal con respecto al punto anterior.

F

Adquisición de Datos

La adquisición de datos, DAQ, consiste en la toma de muestras del mundo real, señales analógicas, para generar datos manipulables desde un ordenador, es el proceso de medir con una computadora un fenómeno físico como voltaje, corriente, temperatura, presión o sonido. En su forma más sencilla, un técnico que registra la temperatura de un horno en un papel está ejecutando adquisición de datos.

A medida que la tecnología ha avanzado, este tipo de proceso se ha simplificado y se ha hecho más preciso, versátil y fiable a través del equipo electrónico. El equipo va desde graficadores sencillos a sistemas de cómputo sofisticados. En el proceso de caracterización de las dinámicas de los distintos sistemas electrónicos mostrados en la *sección 3*, se hace uso de dos tarjetas de adquisición de datos, una tarjeta *NI USB 6353* y una tarjeta *dSPACE 1104*, siendo sus principales características enlistadas a continuación.

Tarjeta dSPACE 1104

- Procesador MPC8240 a una velocidad de 250MHz.
- Cuatro entradas analógicas a $\pm 10V$, con 16 bits de resolución.
- Ocho salidas analógicas a $\pm 10V$, con 12 bits de resolución.

Tarjeta NI USB 6353

- Treinta y dos entradas analógicas, con una velocidad de muestreo de 1.25 MS/seg. en modo monocanal a 16 bits de resolución con $\pm 10V$ a la entrada.
- Cuatro salidas analógicas, con una velocidad de muestreo de 2.86 MS/seg., con una resolución de 16 bits y $\pm 10V$.
- 48 Puertos de entrada/salida digital.
- Cuatro temporizadores de 32 bits.

Como se describe en la *sección 3.3*, el proceso de adquisición de datos se lleva a cabo por medio de la tarjeta NI USB 6353, y el procesamiento de la variable de estado x , de ambos sistemas electrónicos analizados, se desarrolla en la tarjeta dSPACE 1104, con el fin de obtener las respectivas funciones de saturación con las que se analizará la dinámica del modelo. Para garantizar una adquisición de datos fiable y que sea capaz de analizar en su totalidad el fenómeno a estudiar, se realiza el siguiente análisis. Partiendo de un atractor de cinco multi-enroscados, generado a partir del sistema electrónico, *Fig. 3.5*, como el mostrado en la *Fig. 3.9*, se realiza un mapeo en la variación de los parámetros para realizar la adquisición de datos, se modifica tanto la longitud de la serie temporal, como la velocidad de muestreo, una vez obtenidas las series temporales, estas son sometidas tanto al análisis de fluctuaciones sin tendencia como a la búsqueda de leyes potenciales en el espectro de potencias, dichos valores de DFA y leyes potenciales se comparan, con respecto a la función de fluctuación y al espectro de potencias, por medio del coeficiente de correlación de Pearson, c , y al coeficiente de determinación, r^2 , para poder garantizar

que, en base a los análisis realizados, los parámetros de la adquisición son óptimos para desarrollar la caracterización de la dinámica del sistema.

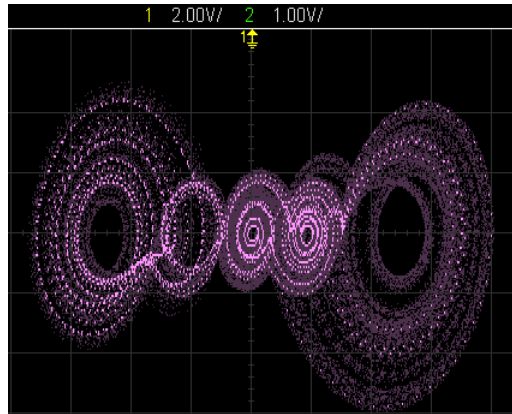


Figura F.1: Atractor de cinco multi-enroscados visto desde el osciloscopio Agilent DSO-X 3102 A.

El atractor de fase mostrado en la *Fig. F.1* es el atractor desde el cual se realiza el análisis para encontrar la región óptima en donde poder desarrollar la obtención de series temporales, por cada combinación en parámetros de adquisición, se almacena una serie temporal, a la cual se le calcula su exponente de fluctuaciones sin tendencia, la correlación de Pearson que posee el ajuste lineal obtenido por medio de mínimos cuadrados contra la función de fluctuación, así como el coeficiente de determinación del mismo ajuste lineal contra la misma función de fluctuación, cada uno de los valores se grafica en un mapa, *Fig. F.2* y *Fig. F.3*, donde se observa el comportamiento del sistema en base a la adquisición de datos, la barra de colores indica el valor, de acuerdo al gráfico, que representa la modificación en los colores del mapa.

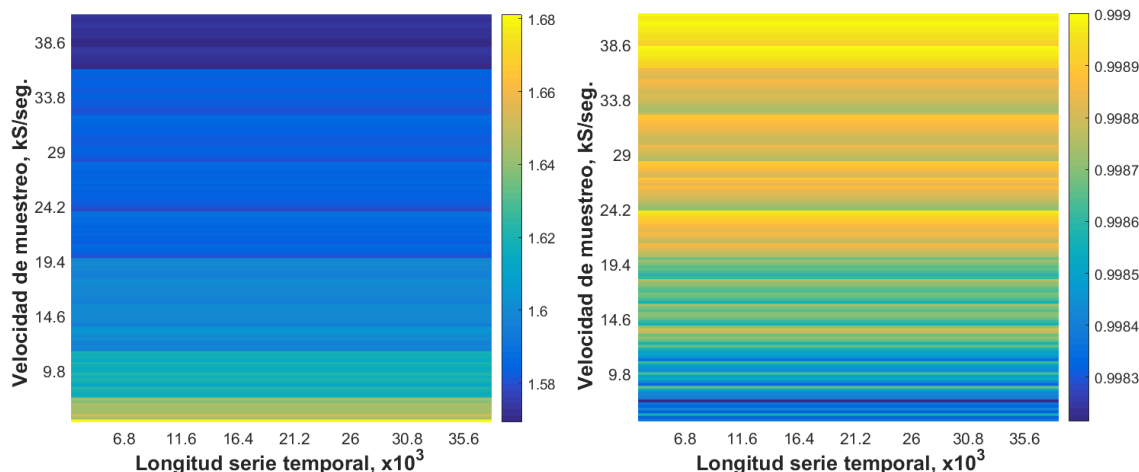


Figura F.2: Izquierda. Mapa de valores en exponente de DFA para la modificación de parámetros en la adquisición de datos. **Derecha.** Mapa de valores de la correlación de Pearson calculada entre la función de fluctuación y el ajuste lineal obtenido por mínimos cuadrados.

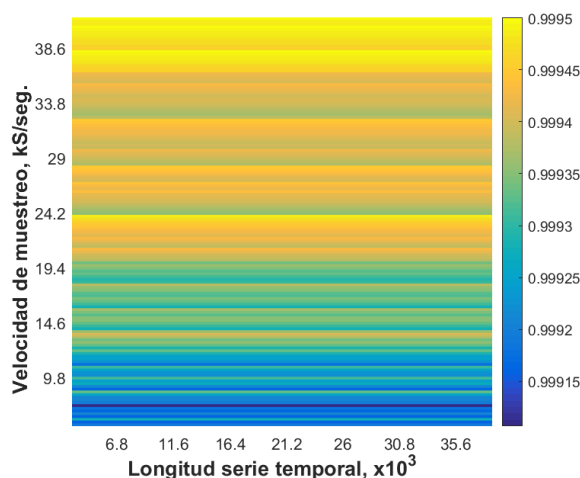


Figura F.3: Mapa de valores del coeficiente de determinación calculado entre la función de fluctuación y el ajuste lineal obtenido por mínimos cuadrados.

De acuerdo a lo mostrado en los mapas de análisis de fluctuaciones sin tendencias, *Fig. F.2* y *Fig. F.3*, se observa que la variabilidad en los exponentes de DFA no son representativos, es decir, se encuentran dentro un rango de valores permitido, al igual que sus correspondientes valores de correlación y determinación, indicando que, sin importar la combinación de valores que se seleccione para desarrollar la adquisición de señales, ésta

será pertinente para desarrollar la caracterización en base a DFA.

Por otro lado, si se analizan las mismas series temporales pero desarrollando el análisis de leyes de potencias en el espectro de frecuencia, se observan los resultados mostrados en las figuras *Fig. F.4* y *F.5*.

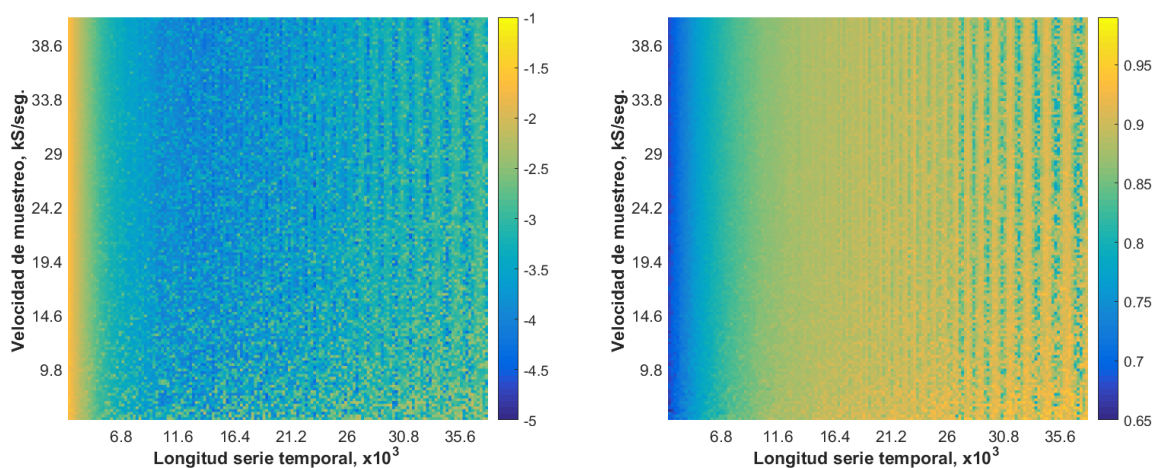


Figura F.4: *Izquierda.* Mapa de valores en exponente de ley de potencias para la modificación de parámetros en la adquisición de datos. *Derecha.* Mapa de valores de la correlación de Pearson calculada entre el espectro de potencias y el ajuste lineal obtenido por mínimos cuadrados.

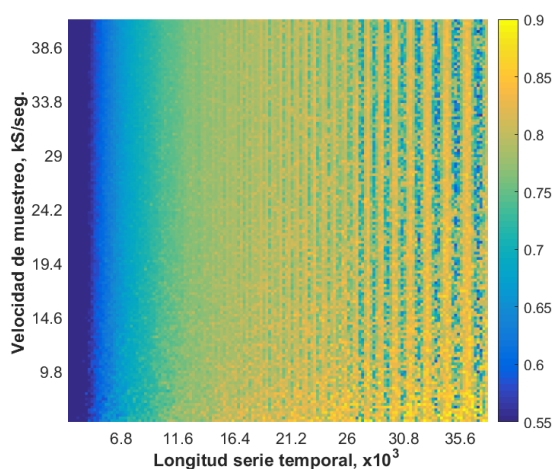


Figura F.5: Mapa de valores del coeficiente de determinación calculado entre el espectro de potencias y el ajuste lineal obtenido por mínimos cuadrados.

Se puede apreciar que en las figuras *Fig. F.4* y *F.5* se obtiene una mayor variación en los

valores obtenidos, tanto en la ley de potencias como en su correspondiente correlación de Pearson y coeficiente de determinación, indicando que la modificación en los parámetros para desarrollar la adquisición de datos juega un papel importante para poder garantizar una correcta reproducción del fenómeno. Analizando los mapas obtenidos a partir del análisis de leyes potenciales se observar una zona de coincidencia entre los valores del exponente de la ley de espectro, su coeficiente de correlación y su correspondiente factor de determinación. Esta zona de coincidencia la podemos ubicar en el rango de las veinte mil muestras, longitud de serie temporal, contra una velocidad de muestro de veinte mil muestras por segundo, generando un atractor como el mostrado en la figura *Fig. F.6*, así como gráficas de análisis correspondientes a DFA y ley de potencias como las mostradas en *Fig. F.7*, con lo que se valida la combinación de valores para poder llevar a cabo la adquisición de datos experimentales de los sistemas electrónicos a caracterizar.

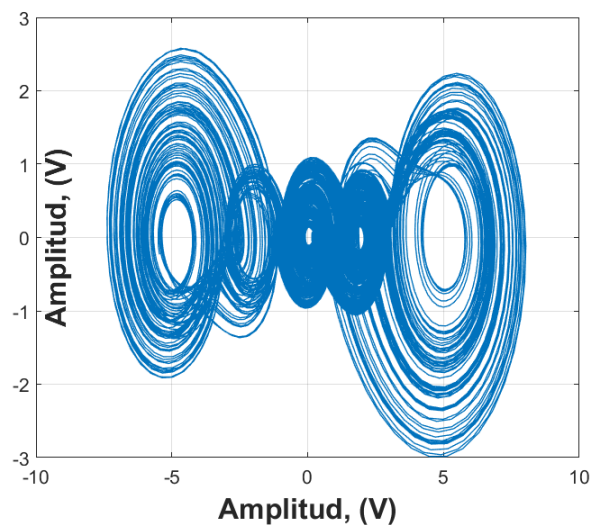


Figura F.6: Atractor del sistema generador de multi-enroscados, obtenido con los parámetros de adquisición, 20 mil puntos en la serie temporal vs 20 kS/seg.

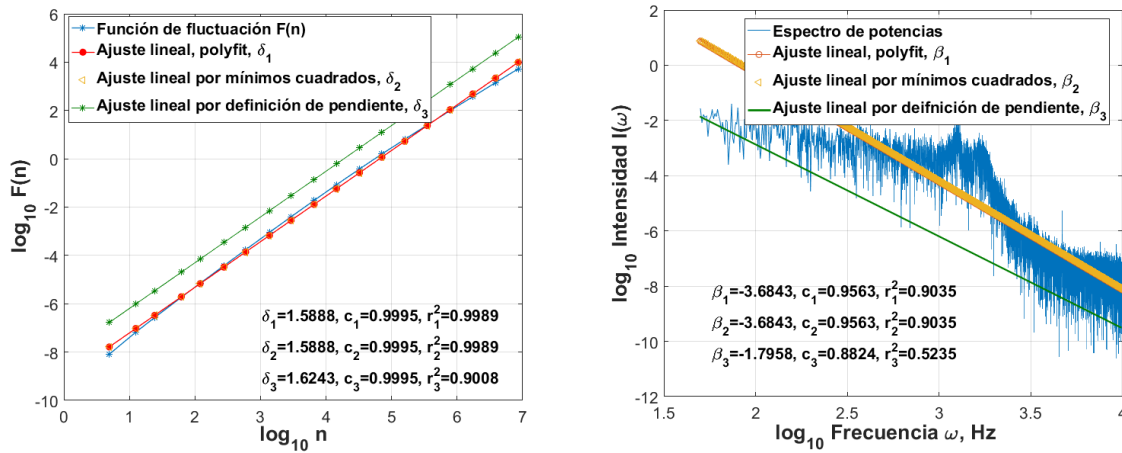


Figura F.7: *Izquierda.* Análisis de DFA para la serie temporal de la variable x del atractor mostrado en la Fig. F.6. *Derecha.* Análisis de leyes de potencias para la serie temporal de la variable x .

Con los resultados mostrados en este apéndice se valida la adquisición de datos experimentales por medio de la tarjeta de adquisición de datos NI USB 6353 en los rangos de valores descritos con anterioridad, siendo validados por medio de los análisis de fluctuaciones sin tendencia y en base al exponente que rige la ley de escalamiento presente en el espectro de potencias.



Recursos de Programación

```
1 %Programa para determinar la existencia de UDS en base a una
2 %combinacion de valores en los parametros de control en el modelo
3 %generador de movimiento Browniano
4 %Ecuaciones del modelo:
5 %x=y
6 %y=(-gamma*y)+z
7 %z=(- alfa1*x)+(- alfa2*y)+(- alfa3*z)+alfa4
8 clear all
9 clc
10 %Parametros del modelo a evaluar
11 gamma=0.1;
12 alfa1=0.9;
13 alfa2=0.7;
14 alfa3=0.8;
15 M=[0 1 0; 0 0 1; -alfa1 -alfa2 -alfa3];
16 propios=eig(M);
17 reales=real(propios);
18 imaginarios=imag(propios);
19 sumatoria=sum(propios);
20 UDS=-1;
21 %Condicion para sumatoria negativa de los valores propios
22 if sumatoria<0
```



```

23 aux1=1;
24 else
25 aux1=0;
26 end
27 if imaginarios~=0
28 aux2=1;
29 else
30 aux2=0;
31 end
32 pos1=find(reales<0); %Ubicacion de reales negativos
33 pos2=find(reales>0); %Ubicacion de reales positivos
34 im=find(imaginarios~=0); %Ubicacion de imaginarios distintos de cero
35 %Discretizacion en base definicion de UDS tipo I
36 if aux1==1 & im~=0
37 if length(pos1)==1 && imaginarios(im(1))== imaginarios(im(2))*-1;
38 UDS=1;
39 elseif length(pos2)==1 && imaginarios(im(1))== imaginarios(im(2))*-1;
40 UDS=2;
41 else
42 UDS=0;
43 end
44 else
45 UDS=0;
46 end

```

Código G.1: Programa para discretizar la dinámica del sistema en base a la definición de UDS I.

```

1 %Programa para analizar series temporales, de acuerdo a cuatro procesos
2 %1.- Analisis de Fluctuaciones sin Tendencia
3 %2.- Analisis de leyes potenciales en el espectro de potencias
4 %3.- Analisis en busqueda de Normalidad en la serie
5 %4.- Analisis del comportamiento del desplazamiento cuadratico medio
6
7 clear all
8 clc
9 load brow.dat; %Se carga el archivo
10 state=brow; %Se define la variable
11 x=state(1,:);
12 %Analisis de Fluctuaciones sin Tendencia
13 in=100:100:1000;
14 N1=length(in);
15 F_n=zeros(N1,1);
16 for i=1:N1
17 ventana=in(i);
18 orden=1;
19 N=length(x);
20 n=floor(N/ventana);
21 N1=n*ventana;
22 y=zeros(N1,1);
23 Yn=zeros(N1,1);
24 fitcoef=zeros(n,orden+1);

```

```

25 mean1=mean(x(1:N1));
26 for j=1:N1
27 y(j)=sum(x(1:j)-mean1);
28 end
29 y=y';
30 for h=1:n
31 fitcoef(h,:)=polyfit(1:ventana,y(((h-1)*ventana+1):h*ventana),orden);
32 end
33 for k=1:n
34 Yn(((k-1)*ventana+1):k*ventana)=polyval(fitcoef(k,:),1:ventana);
35 end
36 sum1=sum((y'-Yn).^2)/N1;
37 sum1=sqrt(sum1);
38 output1=sum1;
39 F_n(i)=output1;
40 end
41 in=in';
42 xlabel('n')
43 ylabel('F(n)')
44 A=polyfit(log(in(1:end)),log(F_n(1:end)),1);
45 dfa=A(1);
46 % Analisis del espectro de potencias
47 f(1:nstep) = (0:(nstep-1))/(tau*nstep);
48 x1 = x(:,i);
49 x1fft = fft(x1);
50 spect = abs(x1fft).^2;
51 law=polyfit(log10(f(1:(nstep/2))),spect(1:(nstep/2)),1);
52 pl=law(1);
53
54 % Analisis de Normalidad;
55 y2=normpdf(x,mean(x),std(x));
56 figure(1);
57 plot(x,y)
58 figure(2);
59 normplot(x)
60
61 % Analisis del Desplazamiento cuadratico medio
62 for h=1:length(x)
63 if h==1;
64 des1(h)=sqrt(x(1)^2);
65 des2(h)=sqrt(x(1)^2);
66 else
67 des1(h)=sqrt(((x(h)-x(1))^2)/2);
68 des2(h)=sqrt(((x(h)-x(h-1))^2)/2);
69 end
70 end
71 msd1=cumsum(des1);
72 msd2=cumsum(des2);

```

Código G.2: Programa para analizar la dinámica de series temporales en base a las cuatro métricas utilizadas.

H

Combinaciones de valores exploradas

Una vez definido el arreglo experimental, *Fig. 4.14*, se definen las combinaciones de valores a explorar, que son elegidas de acuerdo a la definición de un sistema disipativo inestable de primer tipo, *Fig. 3.12*, y se encuentran englobadas en el volúmen que describe el comportamiento del sistema, *ecuación 3.9*, bajo el régimen UDS *I* de la *Fig. 3.14*, mismas que se muestran en el *Cuadro 4.1-4.3*. Cada combinación de valores en los parámetros de control genera tres valores propios del sistema, los cuales, para ser mostrados en los siguientes cuadros, son separados en sus componentes reales e imaginarias, $\lambda_{1-3} = \sigma_{1-3} + i\omega_{1-3}$, siendo σ_i la componente real del valor propio i y la componente imaginaria es representada por la letra ω_i .

Combinaciones de valores explorados													
α_1	α_2	α_3	$-\sigma_1$	σ_2	ω_2	$\sum_{i=1}^3 \lambda_i$	α_1	α_2	α_3	$-\sigma_1$	σ_2	ω_2	$\sum_{i=1}^3 \lambda_i$
0.7	0.7	0.1	0.67	0.23	0.98i	-0.2	0.9	0.7	0.1	0.47	0.03	1.21i	-0.4
0.7	0.7	0.3	0.72	0.16	0.96i	-0.4	0.9	0.7	0.3	0.82	0.21	1.01i	-0.4
0.7	0.7	0.5	0.78	0.09	0.94i	-0.6	0.9	0.7	0.5	0.89	0.14	0.99i	-0.6
0.7	0.7	0.6	0.81	0.05	0.92i	-0.7	0.9	0.7	0.7	0.96	0.08	0.96i	-0.8
0.7	0.7	0.7	0.85	0.02	0.90i	-0.8	0.9	0.7	0.8	1.0	0.1	0.94i	-0.8
0.7	0.9	0.1	0.60	0.20	1.05i	-0.2	0.9	0.7	0.9	1.05	0.02	0.92i	-1
0.7	0.9	0.2	0.62	0.16	1.04i	-0.3	0.9	0.9	0.1	0.70	0.25	1.09i	-0.2
0.7	0.9	0.4	0.66	0.08	1.02i	-0.5	0.9	0.9	0.3	0.75	0.17	1.07i	-0.4
0.7	0.9	0.5	0.69	0.04	1.00i	-0.6	0.9	0.9	0.5	0.80	0.10	1.05i	-0.6
0.7	1.0	0.1	0.57	0.18	1.09i	-0.2	0.9	0.9	0.7	0.87	0.03	1.01i	-0.8
0.7	1.0	0.3	0.60	0.10	1.06i	-0.4	0.9	1.1	0.1	0.64	0.22	1.16i	-0.2
0.7	1.0	0.5	0.64	0.02	1.03i	-0.6	0.9	1.1	0.3	0.68	0.14	1.14i	-0.4
0.7	1.1	0.2	0.55	0.12	1.11i	-0.3	0.9	1.1	0.5	0.72	0.06	1.11i	-0.6
0.7	1.1	0.3	0.57	0.08	1.10i	-0.4	0.9	1.3	0.1	0.58	0.19	1.22i	-0.2
0.7	1.1	0.5	0.60	.003	1.07i	-0.6	0.9	1.3	0.3	0.61	0.10	1.20i	-0.4
0.7	1.2	0.1	0.51	0.15	1.15i	-0.2	0.9	1.3	0.5	0.65	0.02	1.17i	-0.6
0.7	1.2	0.2	0.52	0.11	1.15i	-0.3	0.9	1.5	0.1	0.53	0.16	1.28i	-0.2
0.7	1.2	0.4	0.55	0.02	1.12i	-0.5	0.9	1.5	0.2	0.54	0.12	1.27i	-0.3
0.7	1.3	0.1	0.48	0.14	1.19i	-0.2	0.9	1.5	0.3	0.55	0.07	1.26i	-0.4
0.7	1.3	0.2	0.49	0.09	1.18i	-0.3	0.9	1.5	0.4	0.56	0.03	1.25i	-0.5
0.7	1.3	0.4	0.51	.009	1.16i	-0.5	0.9	1.7	0.1	0.48	0.14	1.35i	-0.2
0.7	1.4	0.1	0.51	.009	1.16i	-0.5	0.9	1.7	0.2	0.49	0.09	1.34i	-0.3
0.7	1.4	0.3	0.47	0.03	1.21i	-0.4	0.9	1.7	0.3	0.50	0.05	1.33i	-0.4

Cuadro H.1: (1) Valores explorados en la implementación electrónica del modelo generador de movimiento Browniano.

Combinaciones de valores explorados													
α_1	α_2	α_3	$-\sigma_1$	σ_2	ω_2	$\sum_{i=1}^3 \lambda_i$	α_1	α_2	α_3	$-\sigma_1$	σ_2	ω_2	$\sum_{i=1}^3 \lambda_i$
0.9	1.7	0.4	0.51	.007	1.32i	-0.5	1.1	1.7	0.3	0.59	0.09	1.35i	-0.4
1.1	0.7	0.2	0.88	0.29	1.07i	-0.3	1.1	1.7	0.5	0.62	0.01	1.32i	-0.6
1.1	0.7	0.4	0.94	0.22	1.05i	-0.5	1.3	0.7	0.1	0.93	0.36	1.12i	-0.2
1.1	0.7	0.6	1.01	0.15	1.08i	-0.7	1.3	0.7	0.5	1.05	0.22	1.08i	-0.6
1.1	0.7	0.8	1.1	0.1	0.99i	-0.9	1.3	0.7	0.7	1.13	0.16	1.05i	-0.8
1.1	0.7	1.0	1.19	0.04	0.95i	-1.1	1.3	0.7	1.0	1.27	0.08	1.00i	-1.1
1.1	0.9	0.2	0.81	0.25	1.13i	-0.3	1.3	0.7	1.3	1.44	0.02	0.94i	-1.4
1.1	0.9	0.4	0.87	0.18	1.10i	-0.5	1.3	0.9	0.3	0.92	0.26	1.15i	-0.4
1.1	0.9	0.6	0.93	0.11	1.07i	-0.7	1.3	0.9	0.5	0.98	0.19	1.13i	-0.6
1.1	0.9	0.8	1.0	0.05	1.04i	-0.9	1.3	0.9	0.7	1.05	0.12	1.1i	-0.8
1.1	0.9	1.0	1.1	0.0	1.0i	-1.1	1.3	0.9	0.9	1.13	0.06	1.06i	-1.0
1.1	1.1	0.1	0.73	0.26	1.19i	-0.2	1.3	1.1	0.7	0.97	0.08	1.15i	-0.8
1.1	1.1	0.3	0.77	0.18	1.17i	-0.4	1.3	1.1	0.9	1.04	0.02	1.11i	-1.0
1.1	1.1	0.5	0.82	0.11	1.14i	-0.6	1.3	1.3	0.1	0.75	0.27	1.28i	-0.2
1.1	1.1	0.7	0.88	0.04	1.11i	-0.8	1.3	1.3	0.3	0.79	0.19	1.26i	-0.4
1.1	1.3	0.1	0.67	0.23	1.25i	-0.2	1.3	1.3	0.5	0.83	0.11	1.23i	-0.6
1.1	1.3	0.3	0.7	0.15	1.23i	-0.4	1.3	1.3	0.7	0.89	0.04	1.20i	-0.8
1.1	1.3	0.5	0.75	0.07	1.2i	-0.6	1.3	1.5	0.1	0.69	0.24	1.34i	-0.2
1.1	1.3	0.7	0.80	.001	1.17i	-0.8	1.3	1.5	0.3	0.73	0.16	1.32i	-0.4
1.1	1.5	0.1	0.62	0.21	1.31i	-0.2	1.3	1.5	0.5	0.77	0.08	1.29i	-0.6
1.1	1.5	0.3	0.64	0.12	1.29i	-0.4	1.3	1.5	0.7	0.81	.009	1.25i	-0.8
1.1	1.5	0.5	0.68	0.04	1.26i	-0.6	1.3	1.7	0.1	0.64	0.22	1.39i	-0.2
1.1	1.7	0.1	0.57	0.18	1.37i	-0.2	1.3	1.7	0.3	0.67	0.13	1.37i	-0.4

Cuadro H.2: (2) Valores explorados en la implementación electrónica del modelo generador de movimiento Browniano.

Combinaciones de valores explorados													
α_1	α_2	α_3	$-\sigma_1$	σ_2	ω_2	$\sum_{i=1}^3 \lambda_i$	α_1	α_2	α_3	$-\sigma_1$	σ_2	ω_2	$\sum_{i=1}^3 \lambda_i$
1.3	1.7	0.5	0.71	0.05	1.35i	-0.6	1.5	1.1	0.3	0.92	0.26	1.24i	-0.4
1.5	0.7	0.1	0.99	0.39	1.16i	-0.2	1.5	1.1	0.5	0.98	0.19	1.22i	-0.6
1.5	0.7	0.3	1.05	0.32	1.14i	-0.4	1.5	1.1	0.7	1.04	0.12	1.18i	-0.8
1.5	0.7	0.5	1.12	0.26	1.12i	-0.6	1.5	1.1	0.9	1.12	0.06	1.15i	-1.0
1.5	0.7	0.7	1.2	0.2	1.1i	-0.8	1.5	1.1	1.1	1.21	.008	1.10i	-1.2
1.5	0.7	0.9	1.28	0.14	1.06i	-1.0	1.5	1.3	0.1	0.82	0.31	1.31i	-0.2
1.5	0.7	1.1	1.39	0.09	1.03i	-1.2	1.5	1.3	0.3	0.86	0.23	1.29i	-0.4
1.5	0.7	1.3	1.5	0.05	0.99i	-1.4	1.5	1.3	0.5	0.91	0.15	1.27i	-0.6
1.5	0.7	1.5	1.63	0.01	0.95i	-1.6	1.5	1.3	0.7	0.97	0.08	1.23i	-0.8
1.5	0.9	0.1	0.93	0.36	1.21i	-0.2	1.5	1.5	0.1	0.76	0.28	1.36i	-0.2
1.5	0.9	0.3	0.99	0.29	1.19i	-0.4	1.5	1.5	0.3	0.80	0.20	1.34i	-0.4
1.5	0.9	0.5	1.05	0.22	1.17i	-0.6	1.5	1.5	0.5	0.85	0.12	1.32i	-0.6
1.5	0.9	0.7	1.12	0.16	1.14i	-0.8	1.5	1.5	0.7	0.90	0.05	1.28i	-0.8
1.5	0.9	0.9	1.2	0.1	1.1i	-1.0	1.5	1.7	0.1	0.71	0.25	1.42i	-0.2
1.5	0.9	1.1	1.3	0.05	1.07i	-1.2	1.5	1.7	0.3	0.75	0.17	1.40i	-0.4
1.5	0.9	1.3	1.41	.009	1.02i	-1.4	1.5	1.7	0.5	0.78	0.09	1.37i	-0.6
1.5	1.1	0.1	0.87	0.33	1.26i	-0.2	1.5	1.7	0.7	0.83	0.01	1.34i	-0.8

Cuadro H.3: (3) Valores explorados en la implementación electrónica del modelo generador de movimiento Browniano.

H.1 Análisis de Fluctuaciones sin Tendencia

Tomando en consideración el diagrama de flujo que describe el proceso para realizar la búsqueda de comportamiento aleatorio, *Fig. 4.13*, en la dinámica de respuesta del sistema electrónico implementado para la generación de movimiento Browniano, *Fig. 4.14*, se analizan las series temporales obtenidas de cada una de las combinaciones de valores, en los parámetros de control del sistema, en búsqueda de un exponente en el análisis de fluctuaciones sin tendencia que pertenezca a una dinámica de tipo Browniana, dando como resultado el siguiente cuadro de combinaciones, en el cual se engloban únicamente aquellas que cumplen con un exponente dentro del rango definido en la *sección 4.1.1*, $1.28 \leq \vartheta \leq 1.64$.

Combinaciones de valores con ϑ deseado.													
α_1	α_2	α_3	$-\sigma_1$	σ_2	ω_2	$\sum_{i=1}^3 \lambda_i$	α_1	α_2	α_3	$-\sigma_1$	σ_2	ω_2	$\sum_{i=1}^3 \lambda_i$
1.5	0.9	1.1	1.3	0.05	1.07i	-1.2	1.5	1.3	0.7	0.97	0.08	1.23i	-0.8
1.5	1.1	0.1	0.87	0.33	1.26i	-0.2	1.5	1.5	0.3	0.80	0.20	1.34i	-0.4
1.5	1.1	0.3	0.92	0.26	1.24i	-0.4	1.5	1.5	0.5	0.85	0.12	1.32i	-0.6
1.5	1.1	0.5	0.98	0.19	1.22i	-0.6	1.5	1.5	0.7	0.90	0.05	1.28i	-0.8
1.5	1.1	0.7	0.04	0.12	1.18i	-0.8	1.5	1.7	0.3	0.75	0.17	1.40i	-0.4
1.5	1.3	0.1	0.82	0.31	1.31i	-0.2	1.5	1.7	0.5	0.78	0.09	1.37i	-0.6
1.5	1.3	0.3	0.86	0.23	1.29i	-0.4	1.5	1.7	0.7	0.83	0.01	1.34i	-0.8
1.5	1.3	0.5	0.91	0.15	1.27i	-0.6							

Cuadro H.4: (2) Combinaciones de valores explorados que poseen exponente ϑ dentro del rango deseado para DFA.

Combinaciones de valores con ϑ deseado.													
α_1	α_2	α_3	$-\sigma_1$	σ_2	ω_2	$\sum_{i=1}^3 \lambda_i$	α_1	α_2	α_3	$-\sigma_1$	σ_2	ω_2	$\sum_{i=1}^3 \lambda_i$
0.7	0.7	0.1	0.67	0.23	0.98i	-0.2	1.3	0.7	0.7	1.13	0.16	1.05i	-0.8
0.7	0.7	0.3	0.72	0.16	0.96i	-0.4	1.3	0.7	1.0	1.27	0.08	1.00i	-1.1
0.7	0.7	0.5	0.78	0.09	0.94i	-0.6	1.3	0.9	0.3	0.92	0.26	1.15i	-0.4
0.7	0.7	0.6	0.81	0.05	0.92i	-0.7	1.3	0.9	0.5	0.98	0.19	1.13i	-0.6
0.7	0.9	0.2	0.62	0.16	1.04i	-0.3	1.3	0.9	0.7	1.05	0.12	1.1i	-0.8
0.9	0.7	0.3	0.82	0.21	1.01i	-0.4	1.3	1.3	0.1	0.75	0.27	1.28i	-0.2
0.9	0.7	0.5	0.89	0.14	0.99i	-0.6	1.3	1.3	0.3	0.79	0.19	1.26i	-0.4
0.9	0.9	0.3	0.75	0.17	1.07i	-0.4	1.3	1.3	0.5	0.83	0.11	1.23i	-0.6
0.9	0.9	0.7	0.87	0.03	1.01i	-0.8	1.3	1.3	0.7	0.89	0.04	1.20i	-0.8
1.1	0.7	0.2	0.88	0.29	1.07i	-0.3	1.3	1.5	0.3	0.73	0.16	1.32i	-0.4
1.1	0.7	0.4	0.94	0.22	1.05i	-0.5	1.3	1.5	0.5	0.77	0.08	1.29i	-0.6
1.1	0.7	0.6	1.01	0.15	1.08i	-0.7	1.3	1.5	0.7	0.81	.009	1.25i	-0.8
1.1	0.7	0.8	1.10	0.10	0.99i	-0.9	1.5	0.7	0.3	1.05	0.32	1.14i	-0.4
1.1	0.9	0.2	0.81	0.25	1.13i	-0.3	1.5	0.7	0.5	1.12	0.26	1.12i	-0.6
1.1	0.9	0.4	0.87	0.18	1.10i	-0.5	1.5	0.7	0.7	1.2	0.2	1.10i	-0.8
1.1	0.9	0.6	0.93	0.11	1.07i	-0.7	1.5	0.7	0.9	1.28	0.14	1.06i	-1.0
1.1	0.9	0.8	1.0	0.05	1.04i	-0.9	1.5	0.7	1.1	1.39	0.09	1.03i	-1.2
1.1	0.9	1.0	1.1	0.0	1.0i	-1.1	1.5	0.7	1.3	1.50	0.05	0.99i	-1.4
1.1	1.1	0.7	0.88	0.04	1.11i	-0.8	1.5	0.9	0.1	0.93	0.36	1.21i	-0.2
1.1	1.3	0.7	0.80	.001	1.17i	-0.8	1.5	0.9	0.3	0.99	0.29	1.19i	-0.4
1.1	1.7	0.3	0.59	0.09	1.35i	-0.4	1.5	0.9	0.5	1.05	0.22	1.17i	-0.6
1.1	1.7	0.5	0.62	0.01	1.32i	-0.6	1.5	0.9	0.7	1.12	0.16	1.14i	-0.8
1.3	0.7	0.5	1.05	0.22	1.08i	-0.6	1.5	0.9	0.9	1.2	0.1	1.1i	-1.0

Cuadro H.5: (1) Combinaciones de valores explorados que poseen exponente ϑ dentro del rango deseado para DFA.

H.2 Ley potencial entre frecuencia e intensidad del espectro de potencia

Siguiendo con el procedimiento descrito en la *Fig. 4.13*, se realiza la búsqueda de leyes potenciales que describan el comportamiento del espectro de potencias, de las combinaciones comprendidas en los *Cuadros H.4-H.5*. Tomando cada una de las combinaciones de valores, en los parámetros de control, se examinan las series temporales que poseen valores en el exponente de DFA propios de la dinámica de tipo Browniana que se desea obtener, una vez analizadas estas series temporales, en caso de que posean un valor en exponente de potencias comprendido en el rango definido en la *sección 4.1.2*, $-1.61 \leq \rho \leq -2.1$, se incluyen en el siguiente cuadro, *Cuadro H.6*, de lo contrario, se descarta dicha combinación de valores como candidata a la generación de movimiento de tipo Browniano.

Combinaciones de valores con ρ deseado.													
α_1	α_2	α_3	$-\sigma_1$	σ_2	ω_2	$\sum_{i=1}^3 \lambda_i$	α_1	α_2	α_3	$-\sigma_1$	σ_2	ω_2	$\sum_{i=1}^3 \lambda_i$
0.7	0.7	0.1	0.67	0.23	0.98i	-0.2	1.5	0.7	0.7	1.2	0.2	1.1i	-0.8
0.7	0.7	0.3	0.72	0.16	0.96i	-0.4	1.5	0.7	1.3	1.5	0.05	0.99i	-1.4
0.9	0.7	0.5	0.89	0.14	0.99i	-0.6	1.5	0.9	0.1	0.93	0.36	1.21i	-0.2
1.1	0.7	0.2	0.88	0.29	1.07i	-0.3	1.5	0.9	0.3	0.99	0.29	1.19i	-0.4
1.1	0.9	0.2	0.81	0.25	1.13i	-0.3	1.5	1.1	0.1	0.87	0.33	1.26i	-0.2
1.1	1.1	0.7	0.88	0.04	1.11i	-0.8	1.5	1.3	0.1	0.82	0.31	1.31i	-0.2
1.3	0.7	0.7	1.13	0.16	1.05i	-0.8	1.5	1.3	0.3	0.86	0.23	1.29i	-0.4
1.3	1.3	0.3	0.79	0.19	1.26i	-0.4	1.5	1.7	0.3	0.75	0.17	1.40	-0.4
1.3	1.3	0.7	0.89	0.04	1.20i	-0.8	1.5	1.7	0.7	0.83	0.01	1.34	-0.8

Cuadro H.6: Combinaciones de valores explorados que poseen exponente ϑ y ρ dentro del rango deseado.

H.3 Distribución Normal de Probabilidad

Una vez que se han eliminado las combinaciones de valores, en los parámetros de control del sistema, que no poseen tanto un exponente propio del movimiento Browniano en el análisis de fluctuaciones sin tendencia como en las leyes potenciales existentes en el espectro de potencias, se analizan las series temporales de las combinaciones comprendidas en el *Cuadro H.6*, donde se realiza la búsqueda de presencia de componentes Normales en su distribución de probabilidad, en base a los parámetros definidos en la *sección 4.1.3*, dando como resultado el *Cuadro H.7*, donde se ven agrupadas aquellas combinaciones de valores del *Cuadro H.6* que poseen Normalidad en su comportamiento.

Combinaciones de valores con distribución Normal.													
α_1	α_2	α_3	$-\sigma_1$	σ_2	ω_2	$\sum_{i=1}^3 \lambda_i$	α_1	α_2	α_3	$-\sigma_1$	σ_2	ω_2	$\sum_{i=1}^3 \lambda_i$
0.7	0.7	0.1	0.67	0.23	0.98i	-0.2	1.5	0.7	1.3	1.5	0.05	0.99i	-1.4
0.7	0.7	0.3	0.72	0.16	0.96i	-0.4	1.5	0.9	0.1	0.93	0.36	1.21i	-0.2
0.9	0.7	0.5	0.89	0.14	0.99i	-0.6	1.5	0.9	0.3	0.99	0.29	1.19i	-0.4
1.1	0.9	0.2	0.81	0.25	1.13i	-0.3	1.5	1.1	0.1	0.87	0.33	1.26i	-0.2
1.1	1.1	0.7	0.88	0.04	1.11i	-0.8	1.5	1.3	0.1	0.82	0.31	1.31i	-0.2
1.3	0.7	0.7	1.13	0.16	1.05i	-0.8	1.5	1.3	0.3	0.86	0.26	1.29i	-0.4
1.3	1.3	0.3	0.79	0.19	1.26i	-0.4	1.5	1.7	0.3	0.75	0.17	1.40i	-0.4
1.5	0.7	0.7	1.20	0.20	1.10i	-0.8	1.5	1.7	0.7	0.83	0.01	1.34	-0.8

Cuadro H.7: Combinaciones de valores explorados que poseen exponente ϑ y ρ dentro del rango deseado y cumplen con una distribución Normal.

H.4 Desplazamiento cuadrático medio

Teniendo en cuenta los resultados mostrados en el *Cuadro H.7*, se desarrolla el análisis del comportamiento del desplazamiento cuadrático medio de la respuesta del sistema, en base a las combinaciones de valores que poseen Normalidad en su dinámica, con lo que se concluye el proceso de caracterización de la dinámica de tipo Browniana, *Fig. 4.13*,

en la respuesta del sistema electrónico implementado, *Fig. 3.17*. Los resultados de dicho análisis se resumen en el *Cuadro H.8*, donde cada una de las combinaciones de valores que se presentan, cumple con los cuatro análisis desarrollados para la caracterización de la dinámica: *i)* Poseen un valor en DFA propio de una dinámica aleatoria, *ii)* Exhiben un comportamiento en el espectro de potencias regido por un exponente característico del movimiento Browniano, *iii)* Presentan componentes Normales en su dinámica, y *iv)* Presentan un comportamiento lineal en su desplazamiento cuadrático medio.

Combinaciones de valores con desplazamiento cuadrático medio.													
α_1	α_2	α_3	$-\sigma_1$	σ_2	ω_2	$\sum_{i=1}^3 \lambda_i$	α_1	α_2	α_3	$-\sigma_1$	σ_2	ω_2	$\sum_{i=1}^3 \lambda_i$
0.7	0.7	0.1	0.67	0.23	0.98i	-0.2	1.5	0.9	0.3	0.99	0.29	1.19i	-0.4
0.9	0.7	0.5	0.89	0.14	0.99i	-0.6	1.5	1.1	0.1	0.87	0.33	1.26i	-0.2
1.1	1.1	0.7	0.88	0.04	1.11i	-0.8	1.5	1.3	0.1	0.82	0.31	1.31i	-0.2
1.3	0.7	0.7	1.13	0.16	1.05i	-0.8	1.5	1.3	0.3	0.86	0.26	1.29i	-0.4
1.5	0.7	0.7	1.20	0.20	1.10i	-0.8	1.5	1.7	0.3	0.75	0.17	1.40i	-0.4
1.5	0.7	1.3	1.5	0.05	0.99i	-1.4	1.5	1.7	0.7	0.83	0.01	1.34i	-0.8

Cuadro H.8: Combinaciones de valores explorados que poseen componente Browniana en base a los análisis realizados.

Bibliografía

- [1] AV Fedorov, SL Harper, SG Philander, B Winter, and A Wittenberg. How predictable is el niño? *Bulletin of the American Meteorological Society*, 84(7):911–919, 2003.
- [2] Dake Chen, Mark A Cane, Alexey Kaplan, Stephen E Zebiak, and Daji Huang. Predictability of el niño over the past 148 years. *Nature*, 428(6984):733–736, 2004.
- [3] E Surovyatkina. Prebifurcation noise amplification and noise-dependent hysteresis as indicators of bifurcations in nonlinear geophysical systems. *Nonlinear processes in geophysics*, 12(1):25–29, 2005.
- [4] Miguel Cervantes Falomir. Análisis del efecto coriolis y su influencia en la circulación global atmosférica. 2011.
- [5] Diego Bricio Hernández. Caminatas aleatorias y movimiento browniano. Technical report, 1981.
- [6] Ulises Márquez Urbina. *Modelos de Cálculo Estocástico para el Movimiento browniano Relativista*. PhD thesis, Tesis de Licenciatura en Matemáticas, Universidad de Guanajuato.
- [7] Ruiz Moncayo, A Ztotnik Espinoza, ROA H González Robles, H Ztotnik Espinoza, et al. *Introducción a la Probabilidad*. Number 519.2 R8. 1980.
- [8] Raúl Toral. *Últimos avances en el movimiento browniano: orden a partir del desorden, CIENTOS AÑOS DE HERENCIA EINSTEINIANA*. 2008.

-
- [9] Hyperphysics. Difusión. <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/Kinetic/diffus.html>, 20 de Enero del 2016.
- [10] Marco-Vinicio Vázquez, Leonardo Dagdug, and Depto de Física UAM-Iztapalapa. Estudio y aplicaciones de la difusión en nanoestructuras y sistemas biológicos. *Contactos. UAM-Iztapalapa. Revista Número*, 76:42–49, 2010.
- [11] JA Armijo. Absorción, distribución y eliminación de los fármacos. *Farmacología humana. Masson, SA, Barcelona*, pages 47–72, 1997.
- [12] María del Carmen Avendaño López. La paradoja farmacéutica: anticancerosos basados en la hipoxia celular. inhibidores parp. In *Anales de la Real Sociedad Española de Química*, number 4, pages 290–297. Real Sociedad Española de Química, 2012.
- [13] Leonardo Dagdug, Alexander M Berezhkovskii, Stanislav Y Shvartsman, and George H Weiss. Equilibration in two chambers connected by a capillary. *The Journal of chemical physics*, 119(23):12473–12478, 2003.
- [14] Edward Lansing Cussler. *Diffusion: mass transfer in fluid systems*. Cambridge university press, 2009.
- [15] Milo Gibaldi, Mary Lee, and Archana Desai. *Gibaldi's drug delivery systems in pharmaceutical care*. ASHP, 2007.
- [16] Roberto Laura. Una introducción a los modelos deterministas y estocásticos. *Revista de Enseñanza de la Física*, 17(1):74–84, 2011.
- [17] Carl Philip Dettmann, EGD Cohen, and H Van Beijeren. Statistical mechanics: Microscopic chaos from brownian motion? *Nature*, 401(6756):875–875, 1999.
- [18] Robert Brown. *A Brief Account of Microscopical Observations Made... on the Particles Contained in the Pollen of Plants, and on the General Existence of Active Molecules in Organic and Inorganic Bodies*. 1828.
- [19] Thorvald Nicolai Thiele. *Sur la compensation de quelques erreurs quasi-systématiques par la méthode des moindres carrés*. CA Reitzel, 1880.

- [20] Albert Einstein. *Investigations on the Theory of the Brownian Movement*. Courier Corporation, 1956.
- [21] Paul Langevin. Sur la théorie du mouvement brownien. *CR Acad. Sci. Paris*, 146(530-533):530, 1908.
- [22] JB Perrin. Discontinuous structure of matter, nobel lecture 1926. *Nobel Lectures*, 1926.
- [23] MV Smoluchowski. *Investigation into a mathematical theory of the kinetics of coagulation of colloidal solutions*. 1967.
- [24] Fokker A.D. *Over Browns'che bewegingen in het stralingsveld*. PhD thesis, Ph.D. Thesis, Leiden.
- [25] Max Planck. *Vorlesungen uber thermodynamik*. 1927.
- [26] LS Ornstein. On the brownian motion. In *Proc. Amst*, volume 21, pages 96–108, 1919.
- [27] HC Burger. Over de theorie der brown'sche beweging. *Verslagen Kon. Ak*, 25:1482, 1917.
- [28] Leon Van Hove. Quantum-mechanical perturbations giving rise to a statistical transport equation. *Physica*, 21(1-5):517–540, 1954.
- [29] R Zwanzig. Lectures in theoretical physics, edited by we brittin, bw downs, and j. Downs (*Interscience, New York, 1961*), 3:106, 1961.
- [30] Paolo Grigolini, Andrea Rocco, and Bruce J West. Fractional calculus as a macroscopic manifestation of randomness. *Physical Review E*, 59(3):2603, 1999.
- [31] Bruce J West, Paolo Grigolini, Ralf Metzler, and Theo F Nonnenmacher. Fractional diffusion and lévy stable processes. *Physical Review E*, 55(1):99, 1997.
- [32] György Trefán, Paolo Grigolini, and Bruce J West. Deterministic brownian motion. *Physical Review A*, 45(2):1249, 1992.

- [33] Francisco J Sevilla, Victor Dossetti, and Alexandro Heiblum-Robles. Synchronization and collective motion of globally coupled brownian particles. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2014(12):P12025, 2014.
- [34] Yoshiki Kuramoto. Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators. In *International symposium on mathematical problems in theoretical physics*, pages 420–422. Springer, 1975.
- [35] G Huerta-Cuellar, E Jimenez-Lopez, E Campos-Cantón, and AN Pisarchik. An approach to generate deterministic brownian motion. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 19(8):2740–2746, 2014.
- [36] Steven H Schot. Jerk: the time rate of change of acceleration. *American Journal of Physics*, 46(11):1090–1094, 1978.
- [37] JC Sprott. Some simple chaotic jerk functions. *American Journal of Physics*, 65(6):537–543, 1997.
- [38] J Clint Sprott. Some simple chaotic flows. *Physical review E*, 50(2):R647, 1994.
- [39] Michael Kennedy, Riccardo Rovatti, and Gianluca Setti. *Chaotic electronics in telecommunications*. CRC press, 2000.
- [40] T Carroll and L Pecora. *Nonlinear dynamics in circuits*. World Scientific, 1995.
- [41] Muhammad Khurram Khan, Ling Xie, and Jiashu Zhang. Chaos and ndft-based spread spectrum concealing of fingerprint-biometric data into audio signals. *Digital Signal Processing*, 20(1):179–190, 2010.
- [42] Guanrong Chen and Xinghuo Yu. *Chaos control: theory and applications*, volume 292. Springer Science & Business Media, 2003.
- [43] G Chen and J Lü. Dynamics of the lorenz system family: analysis, control and synchronization. *SciencePress, Beijing*, 2003.
- [44] Hassan K Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall, New Jersey, 1996.

- [45] Johan Suykens and Joos Vandewalle. Quasilinear approach to nonlinear systems and the design of n -double scroll ($n= 1, 2, 3, 4, \dots$). *IEE Proceedings G (Circuits, Devices and Systems)*, 138(5):595–603, 1991.
- [46] Johan AK Suykens and Anshan Huang. A family of n -scroll attractors from a generalized chua's circuit. *Archiv fur Elektronik und Ubertragungstechnik*, 51(3):131–137, 1997.
- [47] Edward N Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the atmospheric sciences*, 20(2):130–141, 1963.
- [48] Otto E Rössler. An equation for continuous chaos. *Physics Letters A*, 57(5):397–398, 1976.
- [49] JAK Suykens and LO Chua. n -double scroll hypercubes in 1-d cnns. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 7(08):1873–1885, 1997.
- [50] ME Yalcin, JAK Suykens, and Joos Vandewalle. Hyperchaotic n -scroll attractors. In *Proc. IEEE Workshop NDES*, pages 25–28, 2000.
- [51] MÜŞTAK E YALÇIN, Johan AK Suykens, Joos Vandewalle, and Serdar Özoğuz. Families of scroll grid attractors. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 12(01):23–41, 2002.
- [52] Jinhu Lu, Guanrong Chen, Xinghuo Yu, and Henry Leung. Generating multi-scroll chaotic attractors via switching control. In *Control Conference, 2004. 5th Asian*, volume 3, pages 1753–1761. IEEE, 2004.
- [53] Wallace KS Tang, GQ Zhong, G Chen, and KF Man. Generation of n -scroll attractors via sine function. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 48(11):1369–1372, 2001.
- [54] P Arena, S Baglio, L Fortuna, and G Manganaro. Hyperchaos from cellular neural networks. *Electronics letters*, 31(4):250–251, 1995.

- [55] Joseph E Varrientos and Edgar Sánchez-Sinencio. A 4-d chaotic oscillator based on a differential hysteresis comparator. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 45(1):3–10, 1998.
- [56] Jinhu Lu, Guanrong Chen, Xinghuo Yu, and Henry Leung. Design and analysis of multiscroll chaotic attractors from saturated function series. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 51(12):2476–2490, 2004.
- [57] Carlos Sánchez-López, R Trejo-Guerra, JM Munoz-Pacheco, and E Tlelo-Cuautle. N-scroll chaotic attractors from saturated function series employing ccii+ s. *Nonlinear Dynamics*, 61(1):331–341, 2010.
- [58] Pierre Gaspard, ME Briggs, MK Francis, JV Sengers, RW Gammon, Jonathan Robert Dorfman, and RV Calabrese. Experimental evidence for microscopic chaos. *Nature*, 394(6696):865–868, 1998.
- [59] Andrei S Kozlov, Daniel Andor-Ardó, and AJ Hudspeth. Anomalous brownian motion discloses viscoelasticity in the ear’s mechanoelectrical-transduction apparatus. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 109(8):2896–2901, 2012.
- [60] Štefan Porubský. Integer rounding functions. <http://www.cs.cas.cz/portal/AlgoMath/NumberTheory/ArithmeticFunctions/IntegerRoundingFunctions.html>, 20 de Enero del 2016.
- [61] E Campos-Cantón, JG Barajas-Ramírez, G Solis-Perales, and R Femat. Multiscroll attractors by switching systems. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 20(1):013116, 2010.
- [62] National Instruments. Our history. <http://www.ni.com/company/history.htm>, 20 de Enero del 2016.
- [63] A Bruce Buckman. A course in computer-based instrumentation: learning labview tm with case studies. *International Journal of Engineering Education*, 16(3):228–233, 2000.
- [64] Rafael Chacón Rugeles. La instrumentación virtual en la enseñanza de la ingeniería electrónica. *Acción Pedagógica*, 11(1):80–88, 2002.

- [65] Isaac Newton. *The Principia: mathematical principles of natural philosophy*. Univ of California Press, 1999.
- [66] Henri Poincaré and R Magini. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. // *Nuovo Cimento (1895-1900)*, 10(1):128–130, 1899.
- [67] Ao Mo Lyapunov. The general problem of motion stability. *Annals of Mathematics Studies*, 17, 1892.
- [68] SA Oporto Almaraz and GM Ramírez Ávila. Fenómenos no lineales en la reacción de belousov-zhabotinsky. estabilidad. *Revista Boliviana de Física*, 23(23):16–28, 2013.
- [69] Xingyuan Wang and Mingjun Wang. A hyperchaos generated from lorenz system. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 387(14):3751–3758, 2008.
- [70] Leon O Chua. *The genesis of Chua's circuit*. Electronics Research Laboratory, College of Engineering, University of California, 1992.
- [71] JV Greenman and TG Benton. The amplification of environmental noise in population models: causes and consequences. *The American Naturalist*, 161(2):225–239, 2003.
- [72] Morris W Hirsch, Stephen Smale, and Carlos Fernández Pérez. *Ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y álgebra lineal*. Alianza Editorial, 1983.
- [73] Edward Ott. *Chaos in dynamical systems*. Cambridge university press, 2002.
- [74] Antonio Caselles. Modelización y simulación de sistemas complejos. *Editorial de la Universitat de València: Valencia (España)*, 2008.
- [75] Robert C Hilborn. *Chaos and nonlinear dynamics: an introduction for scientists and engineers*. Oxford University Press on Demand, 2000.
- [76] Oscar Duarte. Análisis de sistemas dinámicos lineales. *Universidad Nacional de Colombia, Bogotá*, 2006.
- [77] Lawrence Perko. *Differential equations and dynamical systems*, volume 7. Springer Science & Business Media, 2013.

- [78] Eric Campos-Cantón, Ricardo Femat, and Guanrong Chen. Attractors generated from switching unstable dissipative systems. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 22(3):033121, 2012.
- [79] LJ Ontañón-García, Eric Campos-Cantón, and R Femat. Analog electronic implementation of a class of hybrid dissipative dynamical system. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 26(01):1650018, 2016.
- [80] Diana Graciela Hurtado Rodríguez. Generación de sistemas dinámicos multiestables. *Tesis de Maestría, IPICYT*, 2016.
- [81] Arun V Holden and Yinshui Fan. From simple to complex oscillatory behaviour via intermittent chaos in the rose-hindmarsh model for neuronal activity. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2(4):349–369, 1992.
- [82] Victoriano Carmona, Emilio Freire, Enrique Ponce, and Francisco Torres. On simplifying and classifying piecewise-linear systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 49(5):609–620, 2002.
- [83] Leon O Chua and Lin Yang. Cellular neural networks: Applications. *IEEE Transactions on circuits and systems*, 35(10):1273–1290, 1988.
- [84] Pekka Orponen. A survey of continuous-time computation theory. In *Advances in algorithms, languages, and complexity*, pages 209–224, 1997.
- [85] E. Jiménez López. Caracterización e implementación de sistemas no lineales conmutados y su aplicación en multiestabilidad, filtrado no lineal y sistemas de comunicación. *Tesis de Doctorado, IPICYT*, 2013.
- [86] Jesús M Muñoz-Pacheco, Ernesto Zambrano-Serrano, Olga Félix-Beltrán, Luz C Gómez-Pavón, and Arnulfo Luis-Ramos. Synchronization of pwl function-based 2d and 3d multi-scroll chaotic systems. *Nonlinear Dynamics*, 70(2):1633–1643, 2012.
- [87] Esteban Tlelo Cuautle, DGH Rodríguez, JH Santillán, VH Arreola, and LAC Cantera. Simulation and experimental realization of multi-scroll chaotic oscillators. *Journal of Engineering Science and Technology Review*, 6(4):1–8, 2013.

- [88] Rodolfo Trejo-Guerra, Esteban Tlelo-Cuautle, Victor Hugo Carbajal-Gómez, and G Rodriguez-Gomez. A survey on the integrated design of chaotic oscillators. *Applied Mathematics and Computation*, 219(10):5113–5122, 2013.
- [89] George Gabriel Stokes. *On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums*, volume 9. Pitt Press, 1851.
- [90] HE Gilardi-Velázquez, LJ Ontañón-García, DG Hurtado-Rodriguez, and E Campos-Cantón. Multistability in piecewise linear systems by means of the eigenspectra variation and the round function. *arXiv preprint arXiv:1611.03461*, 2016.
- [91] Giancarlo Benettin, C Froeschle, and JP Scheidecker. Kolmogorov entropy of a dynamical system with an increasing number of degrees of freedom. *Physical Review A*, 19(6):2454, 1979.
- [92] Benoit B Mandelbrot and Roberto Pignoni. The fractal geometry of nature. 1983.
- [93] Peter Grassberger. On the hausdorff dimension of fractal attractors. *Journal of Statistical Physics*, 26(1):173–179, 1981.
- [94] C-K Peng, Sergey V Buldyrev, Shlomo Havlin, Michael Simons, H Eugene Stanley, and Ary L Goldberger. Mosaic organization of dna nucleotides. *Physical review e*, 49(2):1685, 1994.
- [95] A Einstein. Un the movement of small particles suspended in stationary liquids required by the molecular-kinetic theory of heat. *Ann. d. Phys*, 17:549–560, 1905.
- [96] R. Granero-Belinchón. *Sobre algunas relaciones entre la probabilidad y las ecuaciones diferenciales*. PhD thesis, 2000.
- [97] Wilfrid Joseph Dixon, Frank Jones Massey, et al. *Introduction to statistical analysis*, volume 344. McGraw-Hill New York, 1969.
- [98] Thomas L. Floyd. *Dispositivos electrónicos*. Pearson Prentice Hall, 2008.
- [99] Marc Bara Iniesta. *El amplificador operacional*.

- [100] MT Blázquez, M Anguiano, F Arias, AM Lallena, and P Carpena. Aplicación del método detrended fluctuation analysis a la trayectoria del centro de presión del cuerpo humano. *Rev Fis Med*, 10(1):27–34, 2009.
- [101] Daniel Peña Sánchez de Rivera. *Regresión y diseño de experimentos*. Alianza editorial, 2002.
- [102] Aaron Clauset, Cosma Rohilla Shalizi, and Mark EJ Newman. Power-law distributions in empirical data. *SIAM review*, 51(4):661–703, 2009.
- [103] Ronald Newbold Bracewell and Ronald N Bracewell. *The Fourier transform and its applications*, volume 31999. McGraw-Hill New York, 1986.
- [104] Li-Juan Yang, BH Zhang, and YE Xuzhen. Fast fourier transform and its applications. *Opto-Electronic Engineering*, 31:1–7, 2004.
- [105] Mario F Triola. *Essentials of statistics*. Pearson/Addison Wesley, 2005.